

Geschichtliches.

Loria, Gino: *Le matematiche nei quaranta secoli della loro storia.* Atti Soc. Ligust. Sci., Genova **11**, 245—324 (1932).

Vier Vorträge: I orientalische, II griechische Mathematik, III Renaissance bis Leibniz, IV neueste Zeit. Die Darstellung bleibt fast ganz im allgemeinen. Ref. kann sich mit verschiedenen Behauptungen nicht einverstanden erklären, so z. B., daß aus ägyptischen Texten folge, daß Oberfläche und Volumen der Halbkugel richtig bestimmt worden seien. Ersteres wurde zwar behauptet, ist aber nicht im entferntesten bewiesen, letzteres wurde bisher nicht einmal behauptet. *O. Neugebauer* (Göttingen).

Bortolotti, Ettore: *La propagazione della scienza attraverso i secoli.* Scientia **52**, 273—286 (1932).

Gifford, A. C.: *The origin of the solar system. I. From the Chaldeans to Chamberlin and Moulton. II. From Jeans to the present day.* Scientia **52**, 141—156 u. 203—222 (1932).

● **Menon, C. P. S.:** *Early astronomy and cosmology. A reconstruction of the earliest cosmic system. With a foreword by L. N. G. Filon.* London: George Allen & Unwin, Ltd. 1932. 10/-.

● **Thureau-Dangin, F.:** *Esquisse d'une histoire du système sexagésimal.* Paris: P. Geuthner 1932. 80 S.

Zusammenfassung verschiedener einschlägiger Untersuchungen des Verf. in populärer Form. Auf Einzelheiten wird in diesem kleinen Buch nicht eingegangen. Inhalt: Les Sumériens. La genèse de la numération sumérienne. Le système fractionnaire. La métrologie et le système sexagésimal. La division du jour et la division du cercle. Le système abstrait. La dernière phase. *O. Neugebauer* (Göttingen).

Thureau-Dangin, F.: *Mathématique babylonienne.* Rev. d'Assyriol. **29**, 59—66 (1932).

Thureau-Dangin, F.: *Notes assyriologiques.* Rev. d'Assyriol. **29**, 77—88 (1932).

Thureau-Dangin, F.: *La ville ennemie de Marduk.* Rev. d'Assyriol. **29**, 109—119 (1932).

Übersetzung zahlreicher Stellen hauptsächlich aus den in den „Cuneiform Texts IX“ publizierten mathematischen Keilschrifttexten. Die Beispiele betreffen meist die Volum- und Trapezberechnungen, die in diesen Texten in die Gestalt von „Belagerungsrechnungen“ gekleidet sind. Auf die Einzelinterpretation soll hier nicht eingegangen werden, da sie noch verschiedener Ergänzungen und Modifikationen fähig ist.

O. Neugebauer (Göttingen).

Loria, Gino: *Les mathématiques chez les anciens Egyptiens.* Revue générale. Bull. Sci. math., II. s. **56**, 236—247 (1932).

Smith, David Eugene: *Note on a Greek papyrus in Vienna.* Amer. Math. Monthly **39**, 425 (1932).

● **Hagstroem, K.-G.:** *Les Préludes antiques de la Théorie des Probabilités.* Stockholm: Fritzes 1932. 54 S.

Es wird das Auftreten des Begriffes der Wahrscheinlichkeit im klassischen Altertum untersucht, einmal als „subjektive“ Wahrscheinlichkeit (im Sinne des nur „wahrscheinlich“-wissen), dann die Wahrscheinlichkeit, die sich in der Bewertung der verschiedenen möglichen Kombinationen der Lagen von vier Knöchelchen bei dem Astragalismos genannten Hasardspiel ausdrückt. Das Material reicht leider nicht aus, um zu einwandfrei sicheren Schlüssen zu gelangen (vor allem sind die Bewertungen als

solche nur höchst lückenhaft bekannt), trotzdem wird die sorgfältige und kritische Zusammenstellung des Verf. für alle weiteren Untersuchungen von Nutzen sein können.

O. Neugebauer (Göttingen).

Ginsburg, J.: *Jacob ben Machir's Version of Menelaus's Work on Spherical Trigonometry.* Scripta Math. 1, 72—78 (1932).

Edition des hebräischen Textes und englische Übersetzung von Buch I, Definitionen (sphärische Winkel, ihre Gleichheit und Ungleichheit), und Satz 1 samt Beweis (Anlegung eines gegebenen Winkels an einen Bogen). — Es kann nicht gerade als Erleichterung der Lektüre bezeichnet werden, wenn in der Übersetzung abwechselnd λ mit Γ und F , τ mit Δ und A , η mit E und H wiedergegeben wird.

O. Neugebauer (Göttingen).

Gandz, Solomon: *The Mishnat ha-Middot the first Hebrew geometry of about 150 C. E. and the geometry of Muhammad ibn Musa al-Khowārizmī, the first Arabic geometry (C. 820), representing the Arabic version of the Mishnat ha-Middot. A new edition of the Hebrew and Arabic texts with introduction, translation and notes.* Quell. Stud. Gesch. Math. A 2, 1—96 (1932).

The Mishnat ha-Middot is an old scientific Mishna, written about 150 A. D. and containing 1) a compilation of the geometrical knowledge in common use among the Hebrew surveyors and rope-stretchers, serving here as an introduction to 2) a Midrash to the chapter of the Bible dealing with the construction of the tabernacle. The discovery of a new fragment of the text, containing parts of a chapter which was not known heretofore, enables the editor to solve the problem which arose thus far from the occurrence of two different group of quotations from the work in the writings of the commentators and to establish beyond reasonable doubt the authorship of Rabbi Nehemiah and the date mentioned above. The first five chapters of the treatise are purely geometrical; they contain in 42 paragraphs definitions of elementary geometrical notions and rules for the computation of areas and volumes; the point of view is entirely practical; no demonstrations are given. The sixth chapter is devoted to the geometrical description of the tabernacle. The second part of the publication contains the Geometry of Muhammad ibn Musa al-Khowārizmī, which forms one chapter of the Algebra by the same writer. It is made evident, that the bulk of this geometry was taken from the Mishnat ha-Middot. The Arabic work is only a new version of the old Hebraic text, to which it adds, however, a few rules and demonstrations; on the other hand such passages as have a specific Jewish character or are not clear are omitted. In choosing a primitive Hebraic treatise as a model for his geometry, al-Khowārizmī once more shows his independence of any Greek influence. In the history of Arabian mathematics he appears even as a direct antagonist to the introduction of the Greek sciences into the Arabian world.

Dijksterhuis (Oisterwijk, Holland).

Keller, Henry: *Numerics in old Hebrew medical lore.* Scripta Math. 1, 66—67 (1932).

Golovensky, David I.: *Maxima and minima in rabbinical literature.* Scripta Math. 1, 53—55 (1932).

Locke, L. Leland: *The ancient Peruvian abacus.* Scripta Math. 1, 37—43 (1932).

Ginsburg, Jekuthiel: *An unknown mathematician of the fourteenth century.* Scripta Math. 1, 60—62 (1932).

● **Mareolongo, Roberto:** *La meccanica di Leonardo da Vinci.* Napoli: Stabilimento Industr. Edit. Meridionali 1932.

● **Woyciechowsky, J. v.:** *Paul Sipos, ein ungarischer Mathematiker des 18. Jahrhunderts. Über seine Ellipsenrektifikation usw.* Mitt. math. Semin., Univ. Debrecen 1932. 124 S. u. dtsch. Zusammenfassung [Ungarisch].

Segre, Beniamino: *La geometria in Italia, dal Cremona ai giorni nostri.* Ann. Mat. pura appl., IV. s. 11, 1—16 (1932).

Algebra und Zahlentheorie.

Meyer, W. Franz: Über die Natur der numerischen Koeffizienten in den expliziten Darstellungen der Potenzsummen durch die elementarsymmetrischen Verbindungen, und vice versa. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. H. 2, 87—98 (1932).

Der bekannten Formel, welche die Potenzsummen $s_r = \sum \lambda_i^r$ durch die elementarsymmetrischen Funktionen e_1, \dots, e_n der Variablen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ausdrückt, werden Formeln an die Seite gestellt, welche erstens umgekehrt die e_r durch die s_r , zweitens und drittens die Funktionen

$$q_r = \sum_{i_1 + \dots + i_n = r} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_n^{i_n}$$

durch die e_r und durch die s_r ausdrücken.

van der Waerden (Leipzig).

Dixon, A. L.: A proof of Hadamard's theorem as to the maximum value of the modulus of a determinant. Quart. J. Math., Oxford Ser. 3, 224—225 (1932).

Der neue Beweis beruht im wesentlichen auf folgendem Gedankengang: A sei die Matrix (a_{ik}) mit komplexen Koeffizienten, \bar{A} die konjugiert komplexe und A' die zu A transponierte Matrix. Dann ist AA' positiv definit. Die Spur von AA' ist einmal gleich der Summe dieser Wurzeln und andererseits gleich $\sum_{i,k} |a_{ik}|^2$. Das Produkt der

Wurzeln ist gleich $\text{Det.}(AA') = |A|^2$. Betrachtet man statt A die Matrix $\left(a_{ik} \left| \sqrt{\sum_{v=1}^n |a_{iv}|^2} \right| \right)$, so wird wegen $\sqrt{|A|^2} \leq \sum_{i,k} |a_{ik}|^2 / n$, $\sqrt{|A|^2} \left| \sqrt{\prod_{i=1}^n \left(\sum_{v=1}^n |a_{iv}|^2 \right)} \right| \leq 1$.

Wegner (Darmstadt).

Pelosi, Luisa: Sull'esponenziale di una matrice, la cui equazione caratteristica è binomia. Atti Pontif. Accad. Sci. Nuovi Lincei 85, 336—344 (1932).

Si considera una matrice d'ordine qualunque, che abbia nulli tutti gli invarianti salvo uno, e viene determinato l'esponenziale della matrice, ottenendolo espresso per mezzo di funzioni intere degli elementi della matrice data.

Autoreferat.

Johansson, Ingebrigt: Eine Repräsentation der zweireihigen Matrizen (und der Quaternionen) durch Geraden des Raumes. Acta math. 59, 443—453 (1932).

Der Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ oder der mit ihr äquivalenten Quaternion wird die Verbindungslinie der Punkte $a_{11}:a_{12}:1:0$ und $a_{21}:a_{22}:0:1$ zugeordnet. Die Bildgeraden der skalaren Matrizen werden auf einen Regulus von Erzeugenden einer F^2 abgebildet. Darstellung der kollinearen Transformationen des Linienraumes durch linear gebrochene Matrizen transformationen. Konstruktion der Bildgeraden von Summe und Produkt zweier Matrizen. Inzidenzbeziehung für zwei Geraden. Bildgeraden der entgegengesetzten, inversen und konjugierten einer Matrix.

E. A. Weiss (Bonn).

Wegner, Udo: Zur Theorie der auflösbaren Gleichungen von Primzahlgrad. I. J. reine angew. Math. 168, 176—192 (1932).

Es handelt sich um die Untersuchung algebraisch auflösbarer Körper $P(\vartheta)$ vom Primzahlgrad p über dem Körper P der rationalen Zahlen. Für diese Körper wird ein hinreichendes Kriterium angegeben, welches aus Eigenschaften der Körperdiskriminante $\Delta_{P(\vartheta)}$ abzulesen gestattet, ob $P(\vartheta)$ speziell binomisch, also durch eine binomische Gleichung definierbar ist. Zu diesem Zwecke wird zunächst festgestellt, daß die Diskriminante eines binomischen $P(\vartheta)$ notwendig die Gestalt $\Delta_{P(\vartheta)} = p^m (p_1 p_2 \dots p_r)^{p-1}$ besitzt, wo die Primzahlen $p_i \neq p$ sind und m einen der drei Werte p , $p-2$ oder $2p-1$ annimmt. Dann wird umgekehrt nachgewiesen, daß ein beliebiges $P(\vartheta)$ sicher binomisch ist, wenn seine Diskriminante die eben angegebene Gestalt hat und außerdem jedes p_i eine primitive Kongruenzwurzel mod p darstellt. Der Beweis dieser Tatsachen stützt sich einmal auf die Primidealzerlegungen in dem Körper $P(\vartheta)$, dem zugehörigen Normalkörper $N(\vartheta)$ und seinem maximalen zyklischen Unterkörper $P(\eta)$, die mit Dedekindschen Methoden studiert werden. Darüber hinaus benützt Verf. aber noch

eine Relation zwischen den Diskriminanten von $P(\vartheta)$, $P(\eta)$ und $N(\vartheta)$, die er mit Hilfe der Zetafunktionen dieser Körper gewinnt, sowie bekannte klassenkörpertheoretische Tatsachen.

F. K. Schmidt (Erlangen).

Miller, G. A.: Non-group operations. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 18, 597—600 (1932).

Eine kurze Betrachtung und Erläuterung von Gruppenpostulaten an Hand eines Beispiels nicht vollständiger Postulate.

Pietrkowski (Erlangen).

Neumann, Bernhard: Die Automorphismengruppe der freien Gruppen. Math. Ann. 107, 367—386 (1932).

In einer Abhandlung in Math. Ann. 91 (1924) hatte Ref. die Automorphismengruppe \mathfrak{G}_n der freien Gruppe \mathfrak{F}_n von n Erzeugenden a_1, \dots, a_n durch 4 erzeugende Automorphismen P, Q, O, U dargestellt und ein vollständiges System definierender Relationen abgeleitet. Bestimmt man einen Automorphismus durch Angabe der n Elemente $[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, in die die Erzeugenden a_i von \mathfrak{F}_n der Reihe nach übergehen, so waren die Erzeugenden

$$P = [a_2, a_1, a_3, \dots, a_n]$$

$$Q = [a_2, a_3, \dots, a_n, a_1]$$

$$O = [a_1^{-1}, a_2, \dots, a_n]$$

$$U = [a_1 a_2, a_2, \dots, a_n].$$

P und Q erzeugen die symmetrische Permutationsgruppe \mathfrak{S}_n der a_i , durch Hinzunahme von O entsteht die „durch Vorzeichenwechsel erweiterte symmetrische Gruppe“ \mathfrak{Z}_n , und durch Hinzunahme von U die Gesamtgruppe \mathfrak{G}_n . Verf. betrachtet überdies die speziellen Automorphismen

$$T = [a_2, a_1^{-1}, a_3, \dots, a_n]$$

$$S = [a_2^{-1}, a_3^{-1}, \dots, a_n^{-1}, a_1^{-1}]$$

$$R = [a_2^{-1}, a_1, a_3, \dots, a_{n-2}, a_n a_{n-1}^{-1}, a_{n-1}^{-1}]$$

und erzeugt für gerades $n \geq 4$ \mathfrak{Z}_n durch T und Q , für ungerades $n \geq 3$ \mathfrak{Z}_n durch T und S , für gerades $n \geq 4$ \mathfrak{G}_n durch Q und R , für ungerades $n \geq 5$ \mathfrak{G}_n durch S und R , für $n = 2$ \mathfrak{G}_n durch O, P, U und für $n = 3$ \mathfrak{G}_n aus S, T, U . Zum Beweis dafür hat man nur in allen Fällen P, Q, O und U aus den jeweils gewählten Erzeugenden darzustellen; das geht am schnellsten unter Bezugnahme auf die Bedeutung dieser Symbole; Verf. macht es aber abstrakt unter Benutzung des Relationensystems. Zugleich leitet Verf. ein Relationensystem in den neuen Erzeugenden aus dem alten ab und erzielt dabei eine Verkleinerung der Anzahl der Relationen. — Hier scheint mir auf Seite 373 in Formel (17c), die aus 6b entsteht, ein Versehen vorzuliegen, indem auf der rechten Seite ein T herausgefallen ist, was auf den Rest von § 3 einwirkt. — In dem angefügten § 7 werden nach dem Vorbild von \mathfrak{Z}_n andere Erweiterungen von \mathfrak{S}_n durch gewisse Gruppen [vgl. Specht, Schriften d. math. Sem. Berlin 1 (1932)] auf Verkleinerung der Erzeugendenzahl untersucht und vor allem für die Erweiterung von \mathfrak{S}_n durch \mathfrak{S}_m einfache Resultate erzielt (vgl. dies. Zbl. 4, 338 [Specht]).

Jakob Nielsen (Kopenhagen).

Kulakoff, A.: Sur les relations entre les parties réelles des caractères de groupes. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 594—596 (1932).

Für die Realteile $R(\chi_i^k)$ der Charaktere χ_i^k einer Gruppe der Ordnung g werden in Verallgemeinerung der Relationen für die χ_i^k selbst die Beziehungen abgeleitet:

$$\sum_{k=1}^r R(\chi_i^k) R(\chi_j^k) = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq i, j \neq i' \\ \frac{g}{2h_i} & \text{für } j = i \neq i' \end{cases},$$

$$\sum_{k=1}^r h_k R(\chi_i^k) R(\chi_j^k) = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq i, j \neq i' \\ \frac{g}{2} & \text{für } j = i \neq i' \end{cases},$$

wobei i und i' Indizes reziproker Klassen bzw. konjugiert komplexer Charaktere sind, h_i die Zahl der Elemente in einer Klasse, r die Klassenanzahl bedeutet. — Sind $\Gamma = \sum_{i=1}^r k_i \Gamma_i$ und $\Gamma' = \sum_{i=1}^r k'_i \Gamma_i$ zwei beliebige Darstellungen mit den Charakteren φ_s und φ'_s [s durchläuft die Gruppenelemente, Γ_i sind die irreduziblen Darstellungen], so gilt für deren Real- und Imaginärteile

$$\sum_s \{R(\varphi_s) R(\varphi'_s) + J(\varphi_s) J(\varphi'_s)\} = g \sum_{\nu=1}^r k_\nu k'_\nu.$$

Der Beweis wird nur skizziert.

Magnus (Frankfurt a. M.).

Eisenhart, Luther Pfahler: Equivalent continuous groups. Ann. of Math., II. s. 33, 665—670 (1932).

Neue Herleitung der Lieschen Bedingungen dafür, daß zwei r -gliedrige Transformationsgruppen durch eine Variablentransformation ineinander übergeführt werden können.

van der Waerden (Leipzig).

Cattaneo, Paolo: Su un particolare covariante biquadratico delle forme binarie biquadratiche. Boll. Un. Mat. Ital. 11, 197—200 (1932).

Sucht man zu jeder Nullstelle einer binären Form n ter Ordnung f den Pol in bezug auf die übrigen $n - 1$ Nullstellen, so erhält man die Nullstellen einer zweiten Form n ter Ordnung φ , deren Gestalt in symbolischer Form angegeben wird. Die Beziehung zwischen f und φ , die im Falle $n = 3$ bekanntlich involutorisch ist, ist in dem ausführlich untersuchten Falle $n = 4$ ($\varphi = 3i^2 f - 16jH$) nicht mehr involutorisch. E. A. Weiss.

Ross, Arnold E.: On representation of integers by quadratic forms. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 18, 600—608 (1932).

Es werden Kriterien über die Darstellung von ganzen Zahlen durch ternäre und quaternäre quadratische Formen aufgestellt. Insbesondere wird untersucht, wann solche Formen universal sind und wann sie die Null in nichttrivialer Weise darstellen (Nullformen). Es wird gezeigt, daß die ganzen Zahlen, die durch eine ternäre quadratische Form f mit quadratfreier Determinante nicht dargestellt werden, in gewissen arithmetischen Reihen liegen, die in engem Zusammenhang mit den Primfaktoren der Determinante und mit den Charakteren von f stehen. Notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß f universal ist, sind: D ungerade oder das Doppelte einer ungeraden Zahl, $\Omega = \pm 1$ und $\binom{F}{p} = \binom{-\Omega}{p}$ für jede Primzahl $p \nmid \Delta$. ($f = \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} x_i x_k$ ist hier eigentlich primitiv, ganzzahlig, indefinit, hat die

Determinante D und die Reziproke F , Ω ist der gr.g. Teiler der Koeffizienten der adjungierten Form von f , und es ist $\Delta \Omega^2 = D$). Jede ternäre quadratische Nullform mit quadratfreier Determinante ist universal. Es wird gezeigt, wie man das Problem der Darstellung von Zahlen durch eine allgemeine ternäre quadratische Form auf eine einfachere Aufgabe zurückführen kann. Für quadratische Formen wird bewiesen: Es gibt keine universale positive quaternäre Form mit einer Determinante > 112 . Jede indefinite eigentlich primitive quaternäre Form mit positiver quadratfreier Determinante ist universal.

Hofreiter (Wien).

Skolem, Th.: Ein elementares Verfahren zur Herleitung der quadratischen Reziprozitätsgesetze in algebraischen Zahlkörpern. Skr. norske Vid.-Akad., Oslo Nr 2, 1—57 (1932).

In dieser Arbeit werden auf elementarem Wege die quadratischen Reziprozitätsgesetze in quadratischen und zyklisch-kubischen Zahlkörpern sowie für gewisse Zahlgattungen noch anderer Zahlkörper hergeleitet. In quadratischen und zyklisch-kubischen Körpern wird gezeigt, daß das Produkt $(\alpha/\beta)(\beta/\alpha)$ der Jacobischen Symbole (der „quadratische Umkehrfaktor“) bis auf einen explizit angebbaren Vorzeichenfaktor völlig durch die Restklassen von α und β mod 4 bestimmt ist. Im quadratischen Falle wird der Umkehrfaktor durch Jacobische Symbole des rationalen Zahlkörpers

ausgedrückt; in einer Reihe wichtiger Fälle können diese noch gespart werden, insbesondere wenn $\alpha \equiv 1 \pmod{2}$, $\beta \equiv 1 \pmod{2}$ ist. Die alsdann entstehende Formel ist ein Sonderfall einer von Hasse [J. reine angew. Math. **153**, 200 (1924)] für l -te Potenzreste (l Primzahl) und beliebige die l -ten Einheitswurzeln enthaltende Körper bewiesenen. — In engster Beziehung zu diesem Ergebnis steht natürlich eine Zurückführung des Umkehrfaktors auf den quadratischen Restcharakter von α und $\beta \pmod{4}$; doch gelingt sie im kubischen Falle nur dann vollständig, wenn die Zahl 2 im Körper in drei verschiedene Primideale zerfällt. Es wird ferner bewiesen, daß die Formel von Hasse mit $l = 2$, wenn sie in einem Zahlkörper k gilt, auch in jedem über k quadratischen Zahlkörper gilt. Damit ist also ihre Gültigkeit insbesondere für die aus dem rationalen Zahlkörper durch wiederholtes Quadratwurzelziehen entstehenden Körper erwiesen. — Sätze von ähnlichem Typus wie die genannten ergeben sich schließlich in beliebigen endlichen Zahlkörpern hauptsächlich für den Fall, daß α und β ganzzahlige Linearkombinationen von 1 und einer festen ganzen Zahl sind. Insbesondere bleibt alsdann die Formel von Hasse (mit $l = 2$) richtig. W. Weber (Göttingen).

Behrend, Felix: Über numeri abundantes. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. **21/23**, 322—328 (1932).

Für die Anzahl $A(n)$ der unterhalb n gelegenen abundanten Zahlen (d. h. solchen, die höchstens gleich der Summe ihrer echten Teiler sind) bekommt Verf. durch ganz einfache Umformungen die Ungleichung $\frac{A(n)}{n} < 0,461 + \frac{49 \log n}{12n} + \frac{20,25}{n}$. Für $n > 6230$ folgt hieraus (1) $\frac{A(n)}{n} < 0,47$. Für $n \leq 6230$ ist dies nach Dickson'schen Tafeln auch erfüllt. (1) gilt also allgemein und zeigt, daß die Abundanz gewissermaßen einen Ausnahmefall bildet. A. Walfisz (Radość, Polen).

Estermann, T.: An asymptotic formula in the theory of numbers. Proc. London Math. Soc., II. s. **34**, 280—292 (1932).

Es sei $r(h)$ die Anzahl der Zerlegungen von h in 2 Quadrate, $k > 0$ ganz, $\varepsilon > 0$. Verf. beweist für $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{h=1}^n r(h) r(h+k) = 8c_k k^{-1} + O\left(\frac{11}{n^{12}} \log^{\frac{17}{6}+\varepsilon} n\right), \quad \text{wo} \quad c_k = (-1)^k \sum_{d|k} (-1)^d d.$$

Die Arbeit verläuft analog einer früheren des Verf. (dies. Zbl. **1**, 203), in der Verf. das entsprechende Problem für die Teilerzahlen behandelt hat. Hans Heilbronn.

Mordell, L. J.: On a sum analogous to a Gauss's sum. Quart. J. Math., Oxford Ser. **3**, 161—167 (1932).

Verf. betrachtet die Ausdrücke

$$S = \sum_{x=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{f(x)}{p}},$$

wo p eine Primzahl und $f(x)$ ein Polynom $a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_n x$ mit ganzen Koeffizienten a_1, a_2, \dots, a_n bezeichnet; ersichtlich kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß $a_1 \not\equiv 0(p)$ und $n < p-1$ ist. Verf. zeigt dann:

$$|S|^{2n} \leq n^n (n, p-1) \frac{p^{2n}}{p(p-1)}, \quad (p > n)$$

woraus für wachsende p unmittelbar $|S| = O(p^{1-1/n})$ zu erschließen ist. Ähnliche Resultate beweist Verf. für die zu S analoge Summe S' , die aus S entsteht, wenn darin $f(x)$ durch

$$\Phi(x) = a_1 x^{l_1} + a_2 x^{l_2} + \dots + a_n x^{l_n}$$

mit ganzen rationalen, evtl. negativen Exponenten l_i , $1 \leq i \leq n$, ersetzt wird. Natürlich ist die Potenz x^{l_i} für $l_i < 0$ und $x \equiv 0(p)$ durch die Kongruenz $x^{-l_i} x^i \equiv 1(p)$ definiert, und in der Summe über x wird das Glied mit $x = 0$ ausgelassen. — Der Beweis der Abschätzung von $|S|^{2n}$ verläuft etwa folgendermaßen: Man sieht sofort, daß

$$|S|^{2n} = \sum e^{2\pi i \frac{g}{p}}, \quad g = \sum_{r=1}^n f(x_r) - \sum_{r=1}^n f(y_r),$$

wo die erste Summe über alle x_r, y_r , $1 \leq r \leq n$, von 0 bis $p-1$ zu erstrecken ist. Nun ist

$$g = \sum_{s=1}^n \left\{ a_s \sum_{r=1}^n (x_r^{n+1-s} - y_r^{n+1-s}) \right\}.$$

Summiert man jetzt die $|S|^{2n}$ über alle a_s , $1 \leq s \leq n$, von 0 bis $p-1$, so ergibt sich

$$\sum_{a_s} |S|^{2n} = N p^n, \quad (1)$$

und hier ist N die Anzahl der Lösungen $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ des Kongruenzsystems

$$\sum_{r=1}^n x_r^s \equiv \sum_{r=1}^n y_r^s \pmod{p}, \quad 1 \leq s \leq n \quad (2)$$

Aus den Newtonschen Formeln entnimmt man dann, daß die symmetrischen Grundfunktionen der x_i , $1 \leq i \leq n$, denen der y_i , $1 \leq i \leq n$, kongruent sind, wenn die x_i, y_i zusammen ein Lösungssystem von (2) bilden. Daher ist jedes solche y_i Wurzel der Kongruenz

$$\prod_{v=1}^n (x - x_v) \equiv 0 \pmod{p},$$

also einem der x , kongruent und ebenso jedes x , einem der y , und hieraus folgt durch eine einfache Abzählung $N \leq n^n p^n$. Weiter zeigt sich, daß immer eine gewisse Anzahl von Gliedern der Summe in (1) miteinander identisch sind. Das sind diejenigen, welche bei gegebenen a_1, a_2, \dots, a_n dadurch erhalten werden, daß man $f(x)$ durch $\varphi_{b,c}(x) = f(bx+c) - f(c)$, $1 \leq b \leq p-1$, $0 \leq c \leq p-1$ ersetzt, ohne daß zwei solcher $\varphi_{b,c}(x)$ einander \pmod{p} für alle x kongruent sind. Eine einfache Betrachtung läßt erkennen, daß bei festen a_1, a_2, \dots, a_n stets höchstens $(n, p-1)$ von diesen $\varphi_{b,c}(x)$ einem gegebenen unter ihnen kongruent sein können, und so folgt aus (1) und (2) für jedes S mit $a_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$

$$\frac{p(p-1)}{(n, p-1)} |S|^{2n} \leq n^n p^{2n}.$$

Zum Beweise des entsprechenden Resultats über die Summen S' bedarf es wesentlich schwieriger Überlegungen.

Petersson (Hamburg).

Vinogradov, I.: Sur le nombre des points entiers à l'intérieur d'un cercle. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 3, 313—336 (1932) [Russisch].

Verf. entwirft einen Beweis von $\sum_{n \leq x} r(n) = \pi x + O\left(x^{\frac{17}{53} + \varepsilon}\right)$.

Bemerkungen: 1. Die van der Corputsche Methode führt beim Kreise nicht nur zu $O\left(x^{\frac{27}{82}} (\log x)^{\frac{11}{41}}\right)$, sondern zu $O\left(x^{\frac{27}{82}}\right)$, wie Nieland gezeigt hat. 2. Der Beweis von Hilfssatz 6 in § 3 ist nicht richtig, weil zu wenig Absolutstriche gesetzt werden; der Wortlaut dieses Hilfssatzes ist aus demselben Grunde anfechtbar. 3. Die in § 4 benutzte Reihe

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x^3 - \frac{15}{16}x^4 + \frac{105}{32}x^5 - \dots$$

konvergiert nur für $x=0$; die Ausdrücke für $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, E$ und F sind nicht richtig. 4. Der Inhalt des Teiles G von § 4 (entscheidende Stelle der ganzen Arbeit!) läßt sich überhaupt nicht nachprüfen, da dort, nach des Verf. eigenen Worten, nur die Endergebnisse überaus umfangreicher Rechnungen mitgeteilt werden. 5. Die in § 6 angegebenen Werte von A_m, B_m, A'_m, B'_m sind nicht richtig. 6. Diese Liste der Beanstandungen ist fortsetzbar. A. Walfisz (Radość).

Perron, Oskar: Über mehrfach transzendente Erweiterungen des natürlichen Rationalitätsbereichs. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. H. 2, 79—86 (1932).

Wegen der Nichtabzählbarkeit der transzendenten Zahlen gibt es für jedes natürliche r reelle transzendente Zahlen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$, zwischen denen keine algebraische Gleichung n -ten Grades

$$\sum_{\substack{h_1, h_2, \dots, h_r = 0 \\ h_1 + h_2 + \dots + h_r \leq n}} A_{h_1 h_2 \dots h_r} \xi_1^{h_1} \xi_2^{h_2} \dots \xi_r^{h_r} = 0 \quad (1)$$

mit rationalen Koeffizienten, die nicht alle Null sind, besteht. In der Arbeit wird speziell gezeigt: „Seien $g \geq 2$ und $h \geq 2$ natürliche Zahlen, ferner $j_{\mu r}$ für $\mu = 1, 2, \dots, r$ und $r = 1, 2, 3, \dots$ beliebige Zahlen der Folge 1, 2, \dots, h . Dann besteht zwischen den Summen

$$\xi_{\mu} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{j_{\mu r}}{g^{(r)_{\mu}!}} \quad (\mu = 1, 2, \dots, r) \quad (2)$$

keine algebraische Gleichung der Form (1).“ Das Bemerkenswerte an diesem Satz ist, daß für jede der Zahlen ξ_{μ} des Systems (2) durch Abänderung der Koeffizienten $j_{\mu r}$ nichtabzählbar viele Möglichkeiten sich ergeben. Ähnliche Beispiele lassen sich in beliebiger Anzahl bilden. — Der Beweis beruht auf folgender Verallgemeinerung des

bekannten Liouvilleschen Satzes: „Wenn die r reellen Zahlen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ eine Gleichung n -ten Grades der Form (1) befriedigen und wenn die positive Zahl c unterhalb einer allein von den Zahlen ξ_μ abhängigen Grenze liegt, so gibt es keine $r + 1$ ganze rationale Zahlen $q > 0, p_1, p_2, \dots, p_r$, die den Ungleichungen

$$0 < \left| \xi_1 - \frac{p_1}{q} \right| < \frac{c}{q^n}; \quad 0 < \left| \xi_\mu - \frac{p_\mu}{q} \right| < \frac{c}{q^n} \left| \xi_{\mu-1} - \frac{p_{\mu-1}}{q} \right|^n \quad (\mu = 2, 3, \dots, r)$$

genügen.“

K. Mahler (Krefeld).

Analysis.

Bauer, Simon H.: The function of $\sin x/x$. J. Opt. Soc. Amer. **22**, 537 (1932).

Cesari, Lamberto: Esempio di funzione continua, crescente in senso stretto, con derivata quasi dappertutto nulla. Ist. Lombardo, Rend., II. s. **65**, 647–652 (1932).

Labocetta, Letterio: Espressione analitica di certi limiti singolari e definizione delle funzioni nei punti che ad essi corrispondono. Boll. Un. Mat. Ital. **11**, 208–214 (1932).

Unter Verwendung gewisser von ihm schon an mehreren früheren Stellen (vgl. dies. Zbl. **2**, 253 und 287; **5**, 155) betrachteter Funktionen gibt der Verf. analytische Ausdrücke für Funktionen, die im allgemeinen eindeutig sind, aber in ihren Unbestimmtheitsstellen einen Linien-, Flächen- oder Raumteil auszufüllen streben, ferner auch für solche, die in den Unbestimmtheitsstellen den von der Regel von de l'Hospital gelieferten Wert annehmen.

L. Schrutka (Wien).

Labocetta, L.: Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue. II. Riduzione a tipi normali e integrali fondamentali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **16**, 95–101 (1932).

Für einen gewissen Bereich von reellen Funktionen wird zum Zwecke der effektiven Integration eine systematische Zerlegung in einfachere Bestandteile vorgenommen (I. vgl. dies. Zbl. **5**, 155).

R. Schmidt (Kiel).

Poole, E. G. C.: On calculations of polyhedral mean values. Quart. J. Math., Oxford Ser. **3**, 183–188 (1932).

Durch Spiegelung an den Symmetrieebenen eines regulären Körpers im dreidimensionalen Raum kann ein Punkt P in n Lagen P_1, P_2, \dots, P_n gebracht werden. Ist eine Funktion $f(P)$ gegeben, so handelt es sich um die Berechnung der Funktion $f^*(P) = \frac{1}{n} \sum f(P_r)$ durch Entwicklung nach harmonischen Polynomen (vgl. dies. Zbl. **4**, 64).

Otto Szász (Frankfurt a. M.).

Paley, R. E. A. C.: A remarkable series of orthogonal functions. I. Proc. London Math. Soc., II. s. **34**, 241–264 (1932).

The (Rademacher's) functions $\varphi_n(t) = \text{sign} \sin(2^{n+1} \pi t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ form an orthogonal and normal, but incomplete, set in the interval $(0, 1)$. As the author shows, the orthogonal and normal system of functions:

$$\varphi_0(t) = 1, \quad \varphi_m(t) = \varphi_{n_1}(t) \varphi_{n_2}(t) \dots \varphi_{n_\lambda}(t) \quad \text{for} \quad m = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_\lambda} > 0 \\ (n_1 > n_2 > \dots),$$

which obviously contains $\{\varphi_n\}$ as a subset, is already complete. The functions φ_m had been obtained, in a different way, by Walsh [Amer. J. Math. **45** (1923)], who also observed that, in many respects, the behaviour of the series $\sum c_m \varphi_m$ is similar to that of trigonometric series. Now Paley shows that the similarity goes very far. The purpose of the paper is to extend to the system $\{\varphi_m\}$ some results which had been obtained previously for trigonometric series (see, in particular, Littlewood and Paley, Zbl. **2**, 188) but here the proofs are easier. We mention only the following results. Let

$$f \in L^k (k > 1), \quad f \sim \sum c_m \varphi_m, \quad s_n = \sum_0^n c_m \varphi_m, \quad \lambda_{n+1}/\lambda_n > q > 1, \quad \delta_n = s_{\lambda_n} - s_{\lambda_{n-1}}.$$

Then 1° The ratio $\int_0^1 |f|^k dt / \int_0^1 \{ \sum \delta_n^2 \}^{k/2} dt$ is contained between two positive constants depending only on k and q . 2° The same is true for the ratio

$$\int_0^1 |f|^k dt / \int_0^1 |f^*|^k dt \quad \text{where} \quad f^* = \sum \pm (s_{\lambda_n} - s_{\lambda_{n-1}}).$$

3° s_n tends in mean (of order k) to f . 4° $\sup_n s_{\lambda_n}(t) \in L^k$, $s_{\lambda_n}(t) \rightarrow f(t)$, almost everywhere in t . *A. Zygmund (Wilno).*

Paley, R. E. A. C.: A remarkable series of orthogonal functions. II. Proc. London Math. Soc., II. s. 34, 265–279 (1932).

The paper is concerned with further properties of the series $\sum c_m \psi_m$ (see above). Let

$$f \in L^k \ (k > 1), \ f \sim \sum c_m \psi_m, \ c'_m = c_m / \log^{1/k}(m+2), \ s_n^* = \sum_0^n c'_m \psi_m,$$

$$\sigma_n^{(\delta)} = \sum_0^n c_m \psi_m \left(1 - \frac{m}{n}\right)^\delta \quad (\delta > 0)$$

and let $F \sim \sum c_m^* \psi_m$ where $c_0^* \geq c_1^* \geq \dots$ denotes the set $\{c_n\}$ rearranged in descending order. Among others the following theorems are proved: 1° $\sup_n \sigma_n^{(\delta)}(t) \in L^k$.

2° $\sup_n s_n^*(t) \in L^k$. 3° $\sigma_n^{(\delta)}$ converges to f and s_n^* tends to a limit almost everywhere in the interval $(0, 1)$, even if $f \in L$. 4° The ratio $\int_0^1 |f|^k dt / \int_0^1 |F|^k dt$ is bounded from above if $k \geq 2$ and from below (by a positive number) if $1 < k \leq 2$. *A. Zygmund.*

Geymonat, L.: Un'osservazione su di un teorema di Carathéodory per le funzioni armoniche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 856–859 (1932).

This paper contains the following generalization of a theorem of Carathéodory and Fejér: Let $a_0, a_2, \bar{a}_2, \dots, a_{2n}, \bar{a}_{2n}$ ($a_0 > 0, |a_2| + |\bar{a}_2| + \dots + |a_{2n}| + |\bar{a}_{2n}| > 0$) be arbitrary real numbers and let $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(a_0, a_2, \bar{a}_2, \dots, a_{2n}, \bar{a}_{2n})$ denote the class of series $\sum_{\nu=0}^\infty r^\nu (\alpha_\nu \cos \nu \vartheta + \bar{\alpha}_\nu \sin \nu \vartheta)$ such that $\alpha_0 = a_0, \alpha_\nu = a_\nu, \bar{\alpha}_\nu = \bar{a}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$).

Then the greatest radius R such that there exists a series of class \mathfrak{A} converging for $r < R$ to a positive function, is equal to the smallest positive root ϱ of the equation $D[2a_0, 0, \varrho^2(a_2 + i\bar{a}_2), 0, \dots, 0, \varrho^{2n}(a_{2n} + i\bar{a}_{2n})] = 0$. D denotes the same expression as in the Carathéodory-Fejér theorem, i. e. generally

$$D[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n] = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_{-1} & \alpha_0 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{-n} & \dots & \dots & \alpha_0 \end{vmatrix},$$

where α_0 is a real number and α_k, α_{-k} ($k = 1, 2, \dots, n$) are conjugate complex numbers. *Saks.*

Obrechhoff, Nikola: Sur une méthode générale de sommation des séries divergentes. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 572–574 (1932).

L'auteur donne un procédé de sommation des séries divergentes permettant de sommer la série-produit de Cauchy de deux séries sommables. *S. Mandelbrojt.*

Prasad, B. N.: Non-summability of the conjugate series of a Fourier series. Ann. of Math., II. s. 33, 771–772 (1932).

Completing well known results, the author proves the following theorem: If, for f integrable L , the integral $g(\theta) = 1/2\pi \int_0^\pi [f(\theta+t) - f(\theta-t)] \cotg \frac{1}{2}t dt$ diverges to $+\infty$, the series $\sum_1^\infty (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta)$, conjugate to the Fourier series of f , is summable by the method of Abel to $+\infty$. *A. Zygmund (Wilno).*

Bohr, Harald, und Børge Jessen: Über fastperiodische Bewegungen auf einem Kreis. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 1, 385—398 (1932).

Il s'agit des fonctions de la forme: $y = cx + \psi(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) (où c désigne une constante réelle et $\psi(x)$ une fonction p. p. réelle) et de leurs fonctions inverses $x = \frac{1}{c}y + \chi(y)$. — Pour que $\chi(y)$ soit p. p. il faut qu'à toute valeur de y corresponde une seule valeur de x , mais cela ne suffit pas; il faut encore qu'à chaque $\varepsilon > 0$ donné, on puisse faire correspondre un $\delta > 0$ tel que l'image de tout intervalle de longueur ε de l'axe des x , soit un intervalle de longueur moindre que δ sur l'axe des y . — Ce résultat est complété dans diverses directions. — Si l'on considère x comme l'argument d'un point P_x d'un cercle de centre l'origine et y comme l'argument d'un point P_y d'un autre cercle, on peut dire que le point P_y est animé d'un mouvement p. p.: le titre du travail provient de cette interprétation. J. Favard (Grenoble).

Funktionentheorie:

● **Borel, E., et R. Deltheil:** La géométrie et les imaginaires. Bibliothèque d'éducation par la science. Paris: Albin Michel 1932. 310 S. Frs. 30.—.

Ziel dieses Lehrbuches ist die in seiner zweiten Hälfte gebotene Einführung in die Funktionentheorie. Vorausgeschickt werden ein Kapitel über die Grundbegriffe der euklidischen Geometrie und zwei Kapitel über die Geometrie in der Gaußschen Ebene. So erreichen es die Verf., einen nur mit Schulkenntnissen ausgestatteten Leser sicher und schnell mit dem Begriff der natürlichen Grenze bekannt zu machen. E. A. Weiss (Bonn).

Wiener, Norbert: A note on Tauberian theorems. Ann. of Math., II. s. 33, 787 (1932).

Druckfehlerverzeichnis zu N. Wiener, „Tauberian theorems“, Ann. of Math., II. s. 33, 1—100 (1932); dies. Zbl. 4, 59. R. Schmidt (Kiel).

Kobori, Akira: Über die Schlichtheit der Abschnitte gewisser Potenzreihen. Mem. Coll. Sci. Kyoto A 14, 251—262 (1931).

Ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und gilt $|a_1| \geq |a_n|$, ($n = 2, 3, \dots$), so ist die Potenzreihe $f(z)$ und alle ihre Abschnitte schlicht im Kreise $|z| < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ist $|a_1| \geq |a_n|$, ($n = 2, 3, \dots$), und $f(z)$ schlicht im Kreise $|z| < 1$, so sind alle Abschnitte schlicht für $|z| < \frac{1}{3}$. Birnbbaum (Lwów).

Doob, Joseph L.: On a theorem of Gross and Iversen. Ann. of Math., II. s. 33, 753—757 (1932).

$f(z)$ sei eine in dem von der geschlossenen Jordankurve Γ begrenzten Gebiet γ meromorphe Funktion. Die Menge der Häufungswerte von $f(z)$ für $z \rightarrow z_0$, z_0 auf Γ , z aus γ , werde als der Häufungsbereich s von $f(z)$ in z_0 für z aus γ bezeichnet. Ist $f(z)$ auf Γ in der Umgebung von z_0 (mit evtl. Ausnahme von z_0) stetig, so soll entsprechend die Menge der Häufungswerte von $f(z)$ für $z \rightarrow z_0$, z auf Γ , der Häufungsbereich S von $f(z)$ in z_0 , z auf Γ , heißen. Dieser wird aber auch für den Fall definiert, daß $f(z)$ nicht mehr auf Γ stetig ist. Unter Zuhilfenahme eines Satzes von W. Seidel (vgl. dies. Zbl. 3, 403) wird ein vereinfachter Beweis des folgenden Satzes von Gross und Iversen gegeben: Jeder Punkt von s , der nicht zu S gehört, wird von $f(z)$ in jeder Umgebung von z_0 in γ angenommen, mit höchstens 2 Ausnahmen. Wenn es solche Ausnahmewerte a gibt, so sind dieses „Konvergenzwerte“ von $f(z)$ (d. h. $f(z) \rightarrow a$ für $z \rightarrow z_0$ längs eines passenden in z_0 mündenden Jordanbogens in γ). In dem Falle, daß es 2 Ausnahmewerte gibt, wird jeder andere Punkt der funktionentheoretischen Ebene von $f(z)$ in jeder Nähe von z_0 angenommen. Mit jedem Punkt α aus s , der nicht S angehört, gehört auch ein α enthaltendes Gebiet zu s , dessen Rand nur aus Punkten von S besteht. S. Warschawski (Göttingen).

Noshiro, Kiyoshi: On the starshaped mapping by an analytic function. Proc. Imp. Acad. Jap. 8, 275—277 (1932).

Forme plus précise d'un théorème de Takahashi [Tôhoku Math. J. 35 (1932); ce Zbl. 4, 401]. Soit

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

une fonction régulière pour $|z| < R$ et soit $|f'(z)| < M$ pour $|z| < R$. Le cercle $|z| < R/M$ est représenté sur un domaine étoilé par rapport à l'origine, par la fonction $f(z)$ et par ses sections polynomiales:

$$f_n(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n.$$

Le cas limite est atteint par la fonction

$$f(z) = MR \left[\frac{M}{R} z + (M^2 - 1) \log \left(1 - \frac{z}{MR} \right) \right]$$

dont la dérivée s'annule effectivement pour $z = R/M$. *E. Blanc* (Poitiers).

Myrberg, P. J.: Über beschränkte Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Bereichen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A 33, Nr 8, 1—15 (1931).

Für im Einheitskreise meromorphe Funktionen gilt der Blaschke-Nevalinna-sche Satz und seine von Ahlfors bewiesene Umkehrung. Es gelingt dem Verf., diese Sätze auch für gewisse mehrfach zusammenhängende Gebiete, die von endlich vielen Kreisperipherien begrenzt werden, zu beweisen. Man findet dann: Wenn die im Kreisbereich A meromorphe Funktion $f(z)$ als Quotient zweier beschränkter Funktionen geschrieben werden kann, so konvergiert die Summe der Abstände der Wurzeln der Gleichung $f(z) = c$ vom Rande des Gebiets A für jedes c . Wenn umgekehrt diese Reihe für die Werte c einer genügend dichten Punktmenge konvergiert, so läßt sich $f(z)$ als Quotient zweier beschränkten Funktionen schreiben. Der Beweis beruht auf der Anwendung gewisser automorpher Hilfsfunktionen. *Ahlfors* (Åbo).

Julia, Gaston: Sur la représentation conforme des aires triplement connexes. Comment. math. helv. 4, 106—124 (1932).

In a previous paper (cf. this Zbl. 3, 261) the author studied certain canonical maps of domains bounded by $p + 1$ Jordan curves. The method was based on a properly normalized function $F(z)$ such that $|F(z)|$ was constant on every one of the boundary curves. The results depend essentially upon the distribution of the zeros of $F'(z)$ in the domain and on its boundary. While in the paper referred to above the general case for a general p has been only considered, the present paper gives a detailed discussion of the case $p = 2$. *Tibor Radó* (Columbus, Ohio).

Paatero, V.: Über die konforme Abbildung von Gebieten, deren Ränder von beschränkter Drehung sind. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A 33, Nr 9, 1—79 (1931). Vgl. dies. Zbl. 1, 143.

Ostrowski, Alexander: Asymptotische Abschätzung des absoluten Betrages einer Funktion, die die Werte 0 und 1 nicht annimmt. Comment. math. helv. 5, 55—87 (1933). $p(z)$ étant holomorphe pour $|z| < 1$ et ne prenant pas les valeurs 0 et 1, on sait que

$$|p(z)| < [A |p(0)| + A]^{\frac{1+r}{1-r}} \quad r = |z|$$

A étant une constante absolue (th. de Schottky sous la forme de Landau complétée par Valiron). Ostrowski se propose d'étudier plus à fond le comportement de $|p(z)|$, de déterminer la borne $S^*(a, r)$ de $|p(z)|$ lorsque $a = |p(0)|$ est donné et la borne $S(\alpha, r)$ de $|p(z)|$ lorsque $\alpha = p(0)$ est donné. Il utilise la méthode de Landau, mais au lieu de se borner à introduire la fonction modulaire $J(z)$, il emploie $\lambda(z)$; $J(z)$ convenant plus particulièrement à l'étude des fonctions $m(z)$ hol. pour $|z| < 1$ et telles que $f(z)$ n'ait que des zéros d'ordre multiple de 3 et $f(z) - 1$ que des zéros d'ordre multiple de 2. On passe de $p(z)$ à $m(z)$ par la transformation de $\lambda(z)$ à $J(z)$

$$J = \frac{4}{27} \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2 (\lambda - 1)^2}.$$

D'après le processus de Landau, les valeurs de $C(z)$ définie par $m(z) = J[C(z)]$ [ou par $p(z) = \lambda[C(z)]$] appartiennent à un cercle dont le centre et le rayon non euclidiens dépendent de $C(0)$ et r . Ceci fournit une borne exacte de $|m(z)|$. Lorsque $a \rightarrow \infty$, le passage de $m(z)$ à $p(z)$ donne la valeur de $S^*(a, r)$ et montre que

$$16S^*(a, r) \sim (16a)^{\frac{1+r}{1-r}}.$$

On a un résultat analogue pour $m(z)$, 16 étant remplacé par 1728. Le problème relatif à $S(\alpha, r)$ est plus délicat. O. utilise deux prop. des transformations modulaires: I. On sait que parmi les transf. d'un point par le groupe attaché à $J(z)$ l'ordonnée est maximum pour celui situé dans le domaine fondamental; Ost. montre qu'il en est de même pour les transf. du groupe de $\lambda(z)$. Par suite, les transf. laissant invariant le rayon non euclidien d'un cercle, le max. μ des ordonnées des points des cercles homologues d'un cercle est atteint quand le centre non euc. est dans le domaine fond. II. Si dans les transf. du groupe de $\lambda(z)$, on considère les domaines homologues de $\Im z > s$, ce sont des cercles dits voisinages paraboliques de leur point de contact avec l'axe réel; ces voisinages sont sans points communs si $s \geq 1$; lorsqu'un cercle a son centre non euc. dans le domaine fond. H , il est dans le voisinage de 0 ou 1 (avec $s = 1$) si $\mu \leq \frac{1}{2}$; les transf. des points de ce cercle sont dans ce voisinage quand ils sont dans H . Ces 2 prop. ramènent l'approx. de $S(\alpha, r)$ à celle de $|\lambda(z)|$ sur une droite par. à l'axe réel et sur un cercle tangent à cet axe à l'origine. L'expres. asymp. de $S(\alpha, r)$ lorsque $|\alpha| \rightarrow \infty$ ou $\rightarrow 0$ se déduit de celle de $|\lambda(z)|$ pour $|z|$ très grand ou très petit dans H . Parmi les formules nombreuses et précises obtenues, signalons les suivantes dont la seconde complète un de mes résultats antérieurs:

$$16S(\alpha, r) = [16|\alpha| + \theta c]^{\frac{1+r}{1-r}}, \quad |\theta| < 1, \quad c = \text{const.}; \quad \frac{S(\alpha, r)}{16} \sim \left(\frac{|\alpha|}{16}\right)^{\frac{1-r}{1+r}} \text{ si } |\alpha|^{1-r} \rightarrow 0.$$

G. Valiron (Paris).

Osgood, William F.: On the singular points in the problem of inversion. Ann. of Math., II. s. 33, 740—746 (1932).

Nach der Uniformierungstheorie ist es möglich, eine beliebig gegebene Riemannsche Fläche $G(x, y) = 0$ vom Geschlecht p in der Form $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ zu uniformisieren, wo $\varphi(t)$, $\psi(t)$ automorphe Funktionen einer Hauptkreisgruppe Γ bezeichnen. Dadurch erhält man für die p Normalintegrale u_α ($\alpha = 1, 2, \dots, p$) der Riemannschen Fläche eine Darstellung der Form

$$u_\alpha(t) = \int_{\varepsilon_\alpha}^t \Phi_\alpha(t) dt, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p)$$

wo die $\Phi_\alpha(t)$ innerhalb des Hauptkreises reguläre analytische Funktionen bezeichnen. Das Inversionsproblem für die Integrale erster Gattung führt jetzt zur Frage nach der Gesamtheit der Lösungen $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)$ des Gleichungssystems

$$v_\alpha = u_\alpha(\eta_1) + \dots + u_\alpha(\eta_p) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p) \quad (1)$$

bei gegebenen Werten von v_1, v_2, \dots, v_p . Wenn man allgemein v_α durch $v_\alpha + \omega_\alpha$ ersetzt, wo (ω_α) ein geeignetes System von Perioden der Integrale bezeichnet, wird das Punktsystem $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)$ in einem gegebenen Fundamentalbereich F von Γ liegen. Es sei nun (η) der zum Punktsystem $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)$ in F gehörige Punkt in dem Zylinderbereich (F, F, \dots, F) im p -dimensionalen Raume mit den Koordinaten η_i ($i = 1, 2, \dots, p$). Der Verf. untersucht das Verhalten der im allgemeinen $1 - p$ -deutigen Transformation (1) in der Umgebung derjenigen Punkte, wo die Jacobische Determinante

$$J(\eta_1, \dots, \eta_p) = \frac{\partial(v_1, \dots, v_p)}{\partial(\eta_1, \dots, \eta_p)}$$

der Transformation (1) verschwindet. Die Fläche $J(\eta_1, \dots, \eta_p) = 0$ besteht aus einem System von Ebenen

$$\eta_\alpha - \eta_\beta = 0 \quad (2)$$

und einer Fläche

$$D(\eta_1, \dots, \eta_p) = 0. \quad (3)$$

Es wird u. a. gezeigt, daß die inverse Transformation von (1) in der Umgebung jedes Punktes von (2), der zur Fläche (3) nicht gehört, endlich vieldeutig, in den Umgebungen der Punkte von (3) dagegen unendlich vieldeutig ist. *Myrberg* (Helsinki).

Radoŭitch, Miloch: Sur une classe de fonctions analytiques. Publ. math. Univ. Belgrade **1**, 83—118 (1932).

Jeder analytischen Funktion $F(z)$ ist eine im allgemeinen unendliche Folge von analytischen Transformationen

$$f_1(z), f_2(z), f_3(z), \dots$$

zugeordnet, für welche $F(z)$ automorph ist, also

$$F(f_n(z)) = F(z). \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Man wird so zur Frage geführt, wann es, wie bei den gewöhnlichen, linear-automorphen Funktionen, möglich ist, den Existenzbereich der Funktion $F(z)$ in Polygone so zu zerlegen, daß die Funktion $F(z)$ ihren Wertvorrat in jedem Polygon reproduziert. Verf. zeigt hier, daß eine solche Teilung bei einer allgemeinen Klasse analytischer Funktionen, welche er absolut automorphe Funktionen nennt, möglich ist, nämlich bei Funktionen, deren inverse Funktion eine unbeschränkte Riemannsche Fläche (surface illimitée) besitzt, d. h. eine Fläche, auf welcher keine die analytische Fortsetzung verhindernden singulären Kurven vorhanden sind. Es wird in der Arbeit genauer in die Eigenschaften der Polygone und insbesondere ihr Verhalten in den singulären Punkten des Existenzbereichs von $F(z)$ eingegangen. *Myrberg* (Helsinki).

Basco, M. A.: On the trigonometric developments of certain doubly periodic functions of the second kind. Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 560—568 (1932).

Verf. betrachtet die von Jacobi eingeführten elliptischen Funktionen

$$\Phi_{\alpha\beta\gamma}(x, y) = \vartheta_1^{\frac{\partial \alpha(x+y)}{\partial \beta(x) \partial \gamma(y)}},$$

wo für α, β, γ gewisse 16 Indizestripel zugelassen und als Perioden die Zahlen π und $\pi\tau$, $\Im \tau > 0$, zu wählen sind. Nach allgemeinen Prinzipien, die Verf. früher veröffentlicht hat, lassen sich die Fourierentwicklungen der Quadrate dieser $\Phi_{\alpha\beta\gamma}$ als Funktionen von x leicht angeben. Ein geringer methodischer Unterschied zeigt sich hier zwischen den Fällen, wo die Pole der Funktion $\Phi_{\alpha\beta\gamma}(x, y)$ als Funktion von x kongruent 0 oder $\pi\tau/2$ nach dem Periodengitter sind. Im ersten Fall ergibt sich z. B. für Φ_{001}^2 die Darstellung

$$\Phi_{001}^2(x, y) = \frac{2\vartheta_1'(y)}{\vartheta_1(y)} \left\{ \frac{1}{\sin 2y} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ q^n - 8 \sum_{n=1}^{\infty} a_n'^+ q^n \right\},$$

mit

$$q = e^{\pi i \tau}, \quad a_n^{\pm} = \sum \sin 2(sx + ty), \quad a_n'^{\pm} = \sum s \cos 2(sx + ty),$$

wo die beiden letzten Summen über alle positiven Teiler s und t von n zu erstrecken sind und das Pluszeichen im Exponenten die Bedingung $t \equiv 1(2)$, das Minuszeichen $t \equiv 0(2)$ andeutet. Für $\Phi_{111}^2(x, y)$ ergibt sich

$$\Phi_{111}^2(x, y) = \frac{2\vartheta_1'(y)}{\vartheta_1(y)} \left\{ \cotg x + \cotg 2y + \frac{1}{\sin^2 x} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- q^n - 8 \sum_{n=1}^{\infty} a_n'^- q^n \right\}.$$

Die Entwicklungen der sämtlichen hier betrachteten 16 Funktionen sind aus diesen beiden leicht zu erhalten und vom Verf. explizit angegeben worden. *Petersson*.

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Iglisch, Rudolf: Zum Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Ann. **107**, 471—484 (1932).

Der Verf. knüpft an die v. Misessche Theorie an. Sein Gedanke läßt sich anschaulich so fassen. F sei eine Folge von Nullen und Einsen. Der Grenzwert der relativen Häufigkeit für die Null sei w . Man lege auf F eine mit unendlich vielen Löchern ver-

sehene Schablone S , die — je nach Art der Herstellung — als arithmetische oder stochastische Stellenauswahl bezeichnet wird. Durch sukzessives Verschieben der Schablone von links nach rechts entsteht eine Folge ausgewählter Folgen. Aus ihnen stelle man eine neue Alternative her, indem man der ausgewählten Folge das Merkmal I gibt, wenn die relative Häufigkeit ihrer Nullen wieder den Grenzwert w besitzt, das Merkmal II, wenn das nicht der Fall ist. Gefordert wird zunächst: In dieser Alternative sei der Grenzwert der relativen Häufigkeit für die I gleich 1 für jedes S . Dafür wird gesagt: Mit der Chance 1 trifft man eine durch S gegebene Stellenauswahl, bei der der Grenzwert der relativen Häufigkeit ungeändert geblieben ist. Gefordert wird ferner: Geht man in gleicher Weise von einer jener I-Folgen anstatt von F aus, so sei in der zugeordneten Alternative wieder jene Forderung: „Chance 1“ erfüllt, usf. F heißt dann reguläre Folge und vertritt die Stelle des Misesschen Kollektivs. Der Begriff wird verallgemeinert auf Folgen, denen Punkte eines beliebigen Merkmalraumes zugeordnet sind. Darauf wird gezeigt, wie sich aus solchen regul. Folgen eine Wahrscheinlichkeitsrechnung aufbauen läßt. Von ihr hofft der Verf., daß — falls sie selbst noch nicht widerspruchsfrei ist — sich auf dem eingeschlagenen Wege etwa auftretende Widersprüche immer weiter zurückschieben lassen. Rehbock (Bonn).

Johnson, W. E.: Probability: The deductive and inductive problems. *Mind* 41, 409—423 (1932).

Es handelt sich um die beiden folgenden (meist als Bernoullisches bzw. Bayesisches Problem bezeichneten) Fragen: a) Gegeben sei die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses E . Wie groß ist dann die Wahrsch. dafür, daß E in einer Serie von n Versuchen m mal eintritt? (Deduktives Problem.) b) In einer Serie von n Versuchen sei das Ereignis E m mal eingetroffen. Wie groß ist die Wahrsch. dafür, daß die nach Voraussetzung vorhandene, aber nicht bekannte Wahrsch. x für das Eintreten von E gleich w ist? (Induktives Problem.) Die Voraussetzungen werden erörtert, unter denen die übliche mathematische Behandlungsweise dieser Fragen, namentlich die Anwendung des Multiplikationstheorems für unabhängige Wahrsch., gerechtfertigt ist. — In einem Anhang gibt R. B. Braithwaite den Beweis für eine vom Verf. herrührende Formel, die es unter bestimmten Voraussetzungen gestattet, im Falle abhängiger Ereignisse vom Ausfall einer Serie von n Versuchen auf den Ausfall des $(n+1)$ -ten Versuchs zu schließen. V. Bargmann (Berlin).

Fréchet, Maurice: Sur le comportement de certains noyaux de Fredholm itérés indéfiniment et sur les probabilités en chaîne. *C. R. Acad. Sci., Paris* 195, 590—592 (1932).

Es sei $p(E, F)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte des Übergangs aus E in F , wobei E und F zwei Punkte eines Gebietes V des r -dimensionalen Raumes sind. Es ist also $p(E, F) \geq 0$, $\int_V p(E, F) dF = 1$. Der iterierte Kern $P^{(n)}(E, F)$ ist dann nichts anderes, als die Wahrscheinlichkeitsdichte des Übergangs von E in F in n Schritten. Verf. setzt voraus, daß V beschränkt ist und daß $p(E, F)$ (oder wenigstens irgendeiner aus den iterierten Kernen $P^{(n)}(E, F)$) stetig ist (diese Voraussetzungen scheinen dem Ref. wesentlich für die Gültigkeit der folgenden Resultate zu sein). Dann ist $P^{(n)}(E, F)$ in der folgenden Form darstellbar:

$$P^{(n)}(E, F) = \Pi(E, F) + B^{(n)}(E, F) + K^{(n)}(E, F),$$

wobei $K^{(n)}(E, F)$ mit $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, $B^{(n)}(E, F)$ sich mit n periodisch ändert, und $\Pi(E, F)$ genügt den Gleichungen

$$\begin{aligned} \Pi(E, F) &= \int_V p(E, G) \Pi(G, F) dG = \int_V \Pi(E, G) p(G, F) dG, \\ \int_V \Pi(E, F) dF &= 1. \end{aligned}$$

Man schließt daraus, daß der Rang von $\Pi(E, F)$ endlich ist:

$$\Pi(E, F) = f_1(E) g_1(F) + f_2(E) g_2(F) + \cdots + f_\alpha(E) g_\alpha(F).$$

Endlich bemerkt man leicht, daß die Mittelwerte

$$Q^{(n)}(E, F) = \frac{1}{n} [P^{(1)}(E, F) + P^{(2)}(E, F) + \dots + P^{(n)}(E, F)]$$

mit $n \rightarrow \infty$ gegen $II(E, F)$ konvergieren. — Man sieht also, daß der Fall der Begrenztheit des Gebietes V und der Stetigkeit der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(E, F)$ ganz analog mit dem Falle der endlich vielen möglichen Zustände und der endlichen Matrizen der Übergangswahrscheinlichkeiten ist [vgl. R. v. Mises, Wahrscheinlichkeitsrechnung, § 16 (1931); dies. Zbl. 2, 277].

A. Kolmogoroff (Moskau).

Fréchet, Maurice: Sur la solution continue la plus générale d'une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités en chaîne. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 639—641 (1932).

Verf. betrachtet die Matrizengleichung

$$P(s, t) = P(s, u) P(u, t), \quad s \leq u \leq t \quad (1)$$

unter der supplementären Bedingung $P(s, s) = 1$. Wenn die Determinante $|P(s, t)|$ nicht verschwindet, so kann man $P(t, s) = P^{-1}(s, t)$ setzen; die Gleichung (1) gilt dann bei beliebigen s, u, t . Setzt man jetzt $P(s, 0) = A(s)$, so folgt aus (1), daß $P(s, t) = P(s, 0) P(0, t)$ oder

$$P(s, t) = A(s) A^{-1}(t) \quad (2)$$

ist. Umgekehrt, wenn $A(s)$ mit $|A(s)| \neq 0$ beliebig ist, gibt (2) eine Lösung der Gleichung (1) mit $P(s, s) = 1$ und $|P(s, t)| \neq 0$. Man beweist weiter leicht, daß aus der Stetigkeit der Matrix $P(s, t)$ die Ungleichung $|P(s, t)| \neq 0$ folgt. (Beweis: Es sei $|P(s, t)| = 0$, $s < t$; da $|P(s, s)| = 1 \neq 0$ ist, so gibt es ein kleinstes $u > s$ mit $|P(s, u)| = 0$; dann gelten für jedes v , $s < v < u$, die Relationen $|P(s, v)| \neq 0$, $|P(s, u)| = |P(s, v)| |P(v, u)| = 0$, folglich ist $|P(v, u)| = 0$, was aber der aus der Stetigkeit der Matrix $P(s, t)$ folgenden Relation $\lim_{v \rightarrow u} |P(v, u)| = |P(u, u)| = 1$, $v \rightarrow u$ widerspricht.) Die Formel (2) mit einer beliebigen stetigen Matrix $A(s)$, $|A(s)| \neq 0$, gibt also die allgemeinste stetige Lösung der Gleichung (1) mit $P(s, s) = 1$. Dieser Satz ist beim Verf. ohne Beweis ausgesprochen. Außerdem enthält die Note des Verf. einige Bemerkungen über den Fall der Matrizen von der Ordnung 2.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Potoček, Jan: Sur la dispersion dans la théorie des chaînes de Markoff. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk Nr 154, 1—24 u. franz. Zusammenfassung 25—28 (1932) [Tschechisch].

Definieren wir die Markoffsche Kette durch die voneinander verschiedenen Größen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, die eine veränderliche Größe x mit den Wahrscheinlichkeiten $p_{ik} \geq 0$, $i, k = 1, 2, \dots, r$ annehmen kann; sei $x^{(0)} = \alpha$ der Anfangswert der Größe x und $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$, die Werte, welche die Veränderliche x je nach dem Ergebnis des ersten, zweiten, ... bis n -ten Versuches annimmt. Bezeichnen wir mit $P_{ik}^{(n)}$ die Wahrscheinlichkeit, daß x nach dem n -ten Versuche den Wert α_k annimmt. Es ist dann

$$P_{ik}^{(1)} = p_{ik}, \quad P_{ik}^{(m+n)} = \sum_{s=1}^r P_{is}^{(m)} P_{sk}^{(n)}, \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^r P_{ik}^{(n)} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Bezeichnen wir mit P_{ik} den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ik}^{(n)}$, falls er existiert (der halbbreguläre Fall nach H. Fréchet), und setzen wir $P_{ik} = P_i$, wenn P_{ik} von k unabhängig ist

(der reguläre Fall). Für den Mittelwert der Größe $x^{(n)}$, $a_i^{(n)} = \mathbb{M} x^{(n)}$ gilt $a_i^{(n)} = \sum_{k=1}^r P_{ik}^{(n)} \alpha_k$.

Im regulären Fall ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_i^{(n)} = a = \sum_{k=1}^r P_k \alpha_k$ unabhängig von i . Markoff hat die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{M} \frac{(x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(n)} - na)^2}{n} = \frac{C}{2}$$

bewiesen, und hat eine Formel für seine Berechnung angegeben (vgl. Hostinský: *Méthodes générales du Calcul des Probabilités*, dies. Zbl. 4, 13). Hier wird für C die Formel angegeben

$$\frac{C}{2} = \sum_{k=1}^r P_k (\alpha_k - a)^2 + 2 \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r P_k (\alpha_k - a) (a_l - a) \sum_{n=1}^{\infty} [P_{kl}^{(n)} - P_l].$$

Die Formel wird auf den Fall einer stetigen Veränderlichen übertragen. *K. Rychlik.*

Hostinský, B.: Sur une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk Nr 156, 1—36 (1932).

Eine allgemeine Theorie der Produktintegrale linearer Transformationen mit der Anwendung zur Lösung der Chapman-Smoluchovskischen Gleichung, welche vom Verf. schon früher angezeigt wurde [*Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 16, 25—27 (1932); dies. Zbl. 5, 166]. *A. Kolmogoroff* (Moskau).

Bernstein, Felix: Die mittleren Fehlerquadrate und Korrelationen der Potenzmomente und ihre Anwendung auf Funktionen der Potenzmomente. *Metron* 10, Nr 3, 3—34 (1932).

Die empirischen Potenzmomente ein- und zweidimensionaler Beobachtungsreihen werden als zufällige Variable aufgefaßt; es werden Formeln abgeleitet, die die mittleren Fehlerquadrate, Korrelationskoeffizienten u. dgl. m. dieser Variablen durch ihre Erwartungswerte ausdrücken. Die Ableitung geschieht bemerkenswert einfach mittels Darstellung der Potenzmomente in der Stieltjesschen Integralform. *A. Khintchine.*

Galvani, L.: Sulle curve di concentrazione relative a caratteri non limitati e limitati. *Metron* 10, Nr 3, 61—73 (1932).

Mathematisch-geometrische Betrachtungen über den Begriff der „reduzierten Konzentrationskurve“ (vgl. Gini, *Intorno alle curve di concentrazione* „*Metron*“ 9; dies. Zbl. 4, 121). *Bruno de Finetti* (Trieste).

Baten, William Dowell: Frequency laws for the sum of n variables which are subject each to given frequency laws. *Metron* 10, Nr 3, 75—91 (1932).

Durch Auswertung gewisser mittels Anwendung von charakteristischen Funktionen gewonnenen Integrale werden exakte Formeln für Verteilungen endlicher Summen von zufälligen Variablen abgeleitet; die einzelnen Summanden unterliegen dabei gegebenen Verteilungsgesetzen mit endlicher Wahrscheinlichkeitsdichte; für eine Anzahl von explizit durch analytische Ausdrücke gegebenen Verteilungsgesetzen sind die Ergebnisse in einer beigefügten Tabelle zusammengefaßt. *A. Khintchine.*

Aitken, A. C.: On the orthogonal polynomials in frequencies of type B. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 52, 174—182 (1932).

Horst, Paul: A general method for evaluating multiple regression constants. *J. Amer. Statist. Assoc.* 27, 270—278 (1932).

Craig, Cecil C.: On a property of the semi-invariants of Thiele. *Ann. math. Statist.* 2, 154—164 (1931).

Craig, Cecil C.: Sampling in the case of correlated observations. *Ann. math. Statist.* 2, 324—332 (1931).

Geometrie.

Stoelinga, Th. G. T.: Konvexe Punktmengen. Groningen: Diss. 1932. 69 S. [Holländisch.]

Inhaltsübersicht: Kap. I: Definitionen. Kap. II: Einzelne Eigenschaften. Kap. III: Der Schwerpunkt einer konvexen Menge und der erste Mittelwertsatz der Integralrechnung. Kap. IV: Die konvexe Hülle einer Punktmenge. Kap. V: Die gegenseitige Lage von zwei und mehr konvexen Mengen. — In den beiden ersten Kapiteln werden die verschiedenen Definitionen der konvexen Mengen des n -dimensionalen Raumes auf ihre Äquivalenz untersucht. Hierbei ergeben sich zugleich Existenz und wichtigste Eigenschaften der Stützebenen. In Kap. III wird unter sehr allgemeinen

Voraussetzungen bewiesen, daß der Schwerpunkt einer mit nicht negativer Masse belegten Menge zur konvexen Hülle der Menge gehört. Ferner werden damit im Zusammenhang stehende Sätze abgeleitet, die als Verallgemeinerungen des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung angesehen werden können. Kap. IV bringt zunächst bekannte Eigenschaften der konvexen Hülle einer Menge (jedoch ohne einschränkende Voraussetzung über die Menge). Neu ist in dieser Allgemeinheit der folgende Satz: Jeder Punkt der konvexen Hülle einer zusammenhängenden Menge des n -dimensionalen Raumes gehört wenigstens einem $n-1$ -dimensionalen Simplex an, dessen Ecken zur Menge gehören. [Für abgeschlossene und beschränkte Mengen ist der Satz auf anderem Wege schon vom Ref. Math. Ann. **101**, 241—244 (1929) bewiesen worden.] Die Voraussetzung des Zusammenhangs der Menge kann abgeschwächt, jedoch nicht fortgelassen werden. Das Hauptergebnis von Kap. V ist: Sind A_1, \dots, A_m paarweise punktfremde konvexe Mengen, so lassen sich m konvexe Polyeder A'_1, \dots, A'_m bestimmen, von denen keine 2 einen inneren Punkt gemein haben, so daß A_μ in A'_μ enthalten ist. W. Fenchel (Göttingen).

Cesàro, G.: Sur les formules qui, dans un triangle, donnent la distance du centre du cercle circonscrit au centre d'un cercle tritangent (inscrit, ou ex-inscrit) en fonction des rayons des deux cercles. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **1**, 149—157 (1932).

Martinetti, Vittorio: Costruzione della polarità piana individuata da cinque date coppie di punti coniugati. Ist. Lombardo, Rend., II. s. **65**, 851—854 (1932).

Strubecker, Karl: Über eine Klasse spezieller Dreiecksnetze aus Kreisen. Mh. Math. Phys. **39**, 395—398 (1932).

Es werden diejenigen speziellen Dreiecksnetze aus Kreisen, die in einem Kreisbündel der Ebene enthalten sind (vgl. Volk, S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1929), durch stereographische Projektion auf die Kugel bzw. durch Deutung der Kreise eines hyperbolischen, elliptischen oder parabolischen Bündels als Gerade oder Geodätische einer pseudosphärischen, sphärischen oder euklidischen Geometrie aus den ebenen geradlinigen Dreiecksnetzen bestimmt, wobei sich eine kleine Erweiterung des Resultats ergibt. Volk (Würzburg).

Thébault, V.: Sur la géométrie du tétraèdre. I. Sphères remarquables du tétraèdre. II. Sphères de Tucker et de Taylor. Mathesis **46**, Nr 8, Suppl., 1—14 (1932).

I. Die Kugeln sind so definiert, daß die Potenzen der vier Tetraedereckpunkte die Werte kl_i^2 erhalten, wobei l_i fest vorgegebene Werte bezeichnen und k ein variabler Parameter ist. Es werden die Kugeln untersucht, für welche l_i nacheinander verschiedenen Funktionen von Tetraederkonstanten (besonders der Inhalte der Tetraederdreiecke) gleich sind. Lage der Chordalebenen dieser Kugeln einerseits und der Umkugel andererseits. — II. Um die Eckpunkte des Dreiecks A_i seien Kreise mit den Radien l_i beschrieben. Die Chordale des Kreises um A_i und des Umkreises wird mit den Dreiecksseiten a_j , a_k zum Schnitt gebracht. So entstehen 6 Punkte. Bestehen zwischen den l_i gewisse Relationen, so liegen diese Punkte auf einem Kreise, der dann ein Tucker-Kreis, im Spezialfalle ein Taylor-Kreis ist. Diese Definition der Tucker-Kreise legt der Verf. der Analogiebildung zugrunde: Kugeln um die Tetraedereckpunkte; Chordalebenen dieser Kugeln und der Umkugel; ihre 12 Schnittpunkte mit den entsprechenden Tetraederkanten; Voraussetzungen, unter denen diese Punkte einer Kugel angehören. Eine Taylor-Kugel existiert nur im Falle des regulären Tetraeders. E. A. Weiss (Bonn).

Beck, H.: Konstruktion der Lieschen Geraden-Kugeltransformation. Mh. Math. Phys. **39**, 359—370 (1932).

Liebmann hat bereits die Möglichkeit der Lieschen Geraden-Kugel-Transformation rein geometrisch gezeigt (Abh. bayer. Akad. Wiss. **1915**). Verf. gibt eine Konstruktion der Transformation. — Man baut den konformen Raum durch folgende drei Forderungen in den euklidischen ein: a) Ein eigentlicher Punkt des konformen

Raumes sei die Schar der Isotropen eines Minimalkegels. b) Ein nichtsingulärer akzessorischer Punkt des konformen Raumes sei die Schar der Isotropen einer Minimalebene. c) Der singuläre akzessorische Punkt sei die Schar aller Tangenten des absoluten Kegelschnittes. — Dabei wird unter Isotrope verstanden eine Minimalgerade oder eine Tangente des absoluten Kegelschnittes. Dann gelten die Sätze: A. Den Punkten des projektiven Raumes lassen sich umkehrbar eindeutig die Isotropen des konformen Raumes zuordnen. B. Die Punkte des konformen Raumes entsprechen umkehrbar eindeutig den Geraden eines Gewindes, des sog. Hauptgewindes. — In dem Hauptgewinde ist ein spezielles Geradenetz mit zusammenfallenden Leitgeraden, das Hauptnetz, ausgezeichnet, dessen Netzgeraden und Leitlinie bei der Zuordnung A die unter b) bzw. c) definierten Punkte des konformen Raumes entsprechen. Die Leitgerade des Hauptnetzes ist singuläre Gerade eines ausgearteten Gewindes, des Nebengewindes. Nach einigen Vorbereitungen formuliert der Verf. den Satz: C. Den Geraden des projektiven Raumes entsprechen in der Zuordnung des Satzes A die Kugeln des konformen Raumes. — Die Hauptaufgabe besteht nun in der konstruktiven Durchführung der Zuordnung des Satzes A. Wichtig dabei ist, wo man die singuläre Gerade des Nebengewindes unterbringt. Von den 4 wesentlich verschiedenen Möglichkeiten wird folgende durchgeführt: die sing. Gerade des Nebengewindes sei Bisekante des absoluten Kegelschnittes. — Die vollständige Konstruktion geschieht in 6 Schritten, indem ein Punkt P in verschiedenen Lagen bezüglich des Haupt- und Nebengewindes angenommen und jeweils eine Konstruktion der zugeordneten Isotropen angegeben wird.

Haack (Danzig).

Bhar, G.: A general theorem on cubic curves. Indian Phys.-Math. J. 3, 129—132 (1932).

In einem Punkte P einer ebenen Kurve 3. Ordnung gibt es ∞^1 vierpunktig berührende Kegelschnitte, die ein Büschel bilden; jede Gerade durch P hat bekanntlich denselben Pol für alle Kegelschnitte des Büschels (Pol jener Geraden auch in bezug auf den in P oskulierenden Kegelschnitt). Wenn nun eine Gerade r die Kurve 3. Ordnung in A, B, C schneidet, und wenn man die Pole von r in bezug auf die drei vierpunktig berührenden Kegelschnittbüschel in A, B, C konstruiert, so liegen diese drei Pole auf einer Geraden. Der Beweis wird mit baryzentrischen Koordinaten analytisch geführt.

E. G. Togliatti (Genova).

Godeaux, Lucien: Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis, appartenant à une surface algébrique régulière. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 18, 672—679 (1932).

Eine reguläre algebr. Fläche F vom Geschlecht $p_g = p_a$ trage eine fixpunktfreie zyklische Involution I der Ordnung p . Es handelt sich darum, die kanonischen und bikanonischen Kurven der Bildfläche Φ der Involution zu bestimmen. Angenommen wird, daß das kanonische System $|C|$ von F nicht mit I zusammengesetzt ist. Das Geschlecht $p_g = p_a$ von Φ wird aus

$$p_a + 1 = p(\pi_a + 1)$$

berechnet. Das kanonische System $|C|$ enthält eine gewisse Anzahl $\nu > 1$ von maximalen Teilsystemen $|C_1|, \dots, |C_\nu|$ von den Dimensionen r_1, \dots, r_ν , welche mit der Involution C zusammengesetzt sind und denen daher Systeme $|F_1|, \dots, |F_\nu|$ auf Φ entsprechen. Es ist

$$r_1 + r_2 + \dots + r_\nu + \nu = p_a.$$

Ist nun $p_a \geq p$, also $\pi_a > 0$, so ist das kanonische System $|F|$ von Φ unter den $|F_i|$ schon enthalten, und zwar ist es dasjenige unter den $|F_i|$, etwa $|F_1|$, welches die kleinste Dimension r_1 hat. Ist speziell $\nu = p$, so ist $r_1 = \pi_a - 1, r_2 = r_3 = \dots = r_p = \pi_a$. Die zweite Möglichkeit ist $p_a = p - 1, \pi_a = 0$. Nimmt man an, daß das Kurvengeschlecht $p^{(1)} > 1$ ist, so sind nach den Relationen

$$\Pi_2 - 1 = \pi^{(1)} - 1, \quad p^{(1)} - 1 = p(\pi^{(1)} - 1)$$

auch das Kurvengeschlecht $\pi^{(1)}$ und das Zweigeschlecht Π_2 von Φ größer als 1. In diesem Fall wird das bikanonische System von Φ durch

$$|A| = |\Gamma_1 + \Gamma_2| = |\Gamma_3 + \Gamma_4| = \dots = |\Gamma_{r-1} + \Gamma_r|$$

gegeben; r ist gerade und $\leq p-1$, also insbesondere $p > 2$. In verschiedenen Fällen werden weiter die adjungierten Systeme $|\Gamma'_i|$ und das trikanonische System untersucht.

van der Waerden (Leipzig).

Rozet, O.: Sur le degré de généralité des surfaces dont les quadriques de Lie ont moins de cinq points caractéristiques. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 18, 700—703 (1932).

Sei P der laufende Punkt einer nicht geradlinigen Fläche (P) . Die Liesche F_2 von (P) berührt ihre Einhüllende außer in P in vier weiteren Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 . Diese sind im allgemeinen voneinander verschieden; sie können jedoch paarweise oder auch alle vier zusammenfallen. Der erste dieser Sonderfälle hängt von 5, der zweite von 4 willkürlichen Funktionen einer Veränderlichen ab, was nach der Cartanschen Methode bewiesen wird.

Čech (Brno).

Segre, B.: Sulle condizioni per la regolarità di un sistema lineare di forme. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 16, 114—120 (1932).

In einem $(r+1)$ -dimensionalen Raume betrachtet Verf. ein vollständiges Linearsystem $|F_r^n|$ von Hyperflächen der Ordnung n , mit einer gegebenen Basismannigfaltigkeit B ; diese B definiert ähnliche vollständige Linearsysteme $|F_r^{n+1}|$, $|F_r^{n+2}|$, ... Das System $|F_r^n|$ wird regulär genannt, wenn alle Systeme $|F_r^{n+1}|$, $|F_r^{n+2}|$, ... auf einer Hyperebene allgemeiner Lage vollständige und reguläre Linearsysteme schneiden. Diese Definition ist offenbar eine induktive: sie wird durch die Festsetzung vervollständigt, daß auf einer Geraden ($r=0$) jede Linearschar von Punktgruppen regulär ist. Für $r=1$ wird bewiesen, daß sie mit der üblichen Definition eines vollständigen regulären Linearsystems ebener Kurven äquivalent ist; für $r=2$ findet man sie schon bei G. Castelnuovo [Ann. di Mat., (2) 25, n. 7 (1897)]. Die praktische Anwendung der obigen Definition wird durch folgende Bemerkungen erleichtert. Die Differenz $d_n^{(r)} - \delta_n^{(r)}$ zwischen der reellen Dimension $d_n^{(r)}$ eines beliebigen Linearsystems $|F_r^n|$ und der virtuellen Dimension $\delta_n^{(r)}$ des bezüglichen vollständigen Linearsystems $|F_r^n|$ wird als „Abweichung“ („scarto“) von (F_r^n) bezeichnet. Nun ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Regularität eines vollständigen Systems $|F_r^n|$, daß die Abweichungen der Systeme, die von den vollständigen Systemen $|F_r^{n+1}|$, $|F_r^{n+2}|$, ..., $|F_r^{n+r}|$ auf Räumen S_r, S_{r-1}, \dots, S_1 allgemeiner Lage bzw. geschnitten werden, alle Null seien.

E. G. Togliatti (Genova).

Bose, R. C.: Correspondence between a tetrahedron and a special type of heptahedron in hyperbolic space. Indian Phys.-Math. J. 3, 133—137 (1932).

In this article the author gives the complementary to his before found correspondence between certain types of polyhedra in non-Euclidean space [Indian Phys.-Math. J. 3, 43—51 (1932)]. He establishes a new correspondence between a tetrahedron and special type of heptahedron in hyperbolic space as follows: draw three normals to the basis plane ABC of tetrahedron at the points A, B and C defining two by two three faces of heptahedron; from a certain point P of space draw three perpendiculars to these faces. These perpendiculars two by two define three more faces of the heptahedron, the triangle ABC is the seventh face of it. The position of point P is found as follows: regard the tetrahedron ABC as immersed in a certain hyperbolic four-dimensional space. Draw $D\Omega$ normal to the hyperplane $ABCD$. Draw the hyperplane $PABCD$ perpendicular to the hyperplane $ABCD$. Then P is the projection of Ω on the hyperplane $PABCD$. The following correspondence is established between both polyhedra: Basis ABC is common in both of them; the edges of heptahedron which are perpendicular to the planes ABC are the complementary of the side edges of tetrahedron; the three edges which issue from the point P are the \triangle -segments for the dihedral angles at basis ABC of the tetrahedron (it means, that this angle is the angle of parallelism for the segment), and the rest six edges are the \triangle -segments for the face

angles at the bases of side faces of the tetrahedron. Analogous correspondence is established between rest dihedral and face angles of both polyhedra. — For each tetrahedron exist four corresponding him heptahedra. The author uses only syntetic methods of proofs.

Nil Glagoleff (Moskow).

Weiss, E. A.: Über eine Konstruktion des Nullsystems im R_{2p+1} . Mh. Math. Phys. 39, 345—358 (1932).

Verf. verallgemeinert die Chaslessche Erzeugungsart eines linearen Komplexes in Räumen ungerader Dimension. Bilden 4 verschiedene Geraden G, G' und H, H' zwei Geradenpaare eines involutorischen Regulus, so kann man nach Chasles folgendermaßen ein Nullsystem konstruieren: Eine Ebene V bestimmt mit den beiden vorgegebenen Geradenpaaren je zwei Punkte. Deren Verbindungslinien schneiden sich im Nullpunkte der Ebene V . Es handelt sich um die Frage: Ist es möglich, das Nullsystem im R_5 in ähnlicher Weise unter Zugrundelegung von zwei Geradentripeln zu konstruieren? Die Lösung geschieht mittels einer Abbildung der Punkt- und Geradenreihen der Ebene auf die Punkte und die R_4 des R_5 . Dabei ist der Ort der Bildpunkte der ∞^3 „singulären Punktreihen“ (d. i. Punkt nebst eines ihm zugeordneten binären Parameters) eine Segresche Mannigfaltigkeit M_3^3 , deren erzeugende Geraden die ∞^2 Verbindungsgeraden entsprechender Punkte von zwei kollinear aufeinander bezogenen Ebenen sind. Ein Punkt p , nacheinander versehen mit allen binären Parametern, gibt eine lineare Mannigfaltigkeit singulärer Punktreihen und wird als Ort dieser Punktreihen auf eine erzeugende Gerade der M_3^3 abgebildet. Den $2 \cdot 3$ Punkten p_1, p_2, p_3 und r_1, r_2, r_3 zweier gegebener Dreiecke entsprechen also $2 \cdot 3$ erzeugende Geraden der M_3^3 . Jetzt gelangt man leicht zu einem Nullsystem, in welchem man den Nullpunkt eines vorgegebenen R_4 dadurch erhält, daß man den R_4 mit den beiden Geradentripeln zum Schnitt bringt und den Schnittpunkt der beiden durch die Schnittpunkttripel gehenden Ebenen bestimmt. Dieses Nullsystem ist im allgemeinen nicht linear, sondern von der Ordnung 5. Verf. zeigt nun, daß es möglich ist, die $2 \cdot 3$ Grundgeraden der M_3^3 bzw. die entsprechenden $2 \cdot 3$ Punkte der Ebene so zu wählen, daß das Nullsystem zerfällt und ein reguläres lineares Nullsystem abspaltet. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß die $2 \cdot 3$ Dreieckspunkte einer Kurve 2. Ordnung angehören. Ferner ergibt sich, daß dem Nullsystem des R_5 eine Polarität \mathfrak{P} der Ebene entspricht. Die Ausgangsdreiecke erweisen sich als unwesentlich für die Konstruktion, sie können durch zwei beliebige Polardreiecke der Polarität \mathfrak{P} ersetzt werden. Schließlich werden noch eine Reihe interessanter Sätze über das Nullsystem im R_5 und seine Beziehung zur M_3^3 abgeleitet und die Konstruktion für den R_{2p+1} verallgemeinert. Haack.

Calapso, Pasquale: Il problema della deformazione nel gruppo conforme, delle reti O di uno spazio a quattro dimensioni. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 1, 355—370 (1932).

Es ergeben sich drei verschiedene Typen solcher Deformationen, von denen nur die eine zum dreidimensionalen Fall analog ist.

Cohn-Vossen (Köln).

Weiss, E. A.: Abbildung der M_6^2 des R_7 auf Punktreihen eines linearen Komplexes. Mh. Math. Phys. 39, 385—394 (1932).

Der Verf. geht von der gleichen Abbildung aus, die schon der oben referierten Arbeit „Über eine Konstruktion des Nullsystems im R_{2n+1} “ zugrunde lag: Die Punktreihen eines projektiven R_n werden eineindeutig auf die Punkte eines projektiven R_{2n+1} abgebildet. Bei dieser Abbildung induziert eine Polarität des R_n ein Nullsystem im R_{2n+1} und umgekehrt ein Nullsystem des R_n eine Polarität im R_{2n+1} . Verf. beschränkt sich auf die Untersuchung im R_3 bzw. R_7 und gelangt zu einer Anzahl interessanter Ergebnisse, von denen hier nur folgendes erwähnt sei: Bei der Abbildung der Punktreihen des R_3 auf die Punkte des R_7 entsprechen die Punktreihen eines regulären linearen Komplexes eineindeutig den Punkten einer regulären M_6^2 . Zwei R_3 derselben Schar einer M_6^2 des R_7 haben entweder keinen Punkt oder gleich eine Gerade gemeinsam; zwei R_3 aus verschiedenen Scharen schneiden sich in einem Punkt oder gleich in einer

Ebene. Schließlich folgen noch einige Sätze über die Punktreihengebüsche eines linearen Komplexes.

W. Haack (Danzig).

● **Bieberbach, Ludwig: Differentialgeometrie.** (Teubners math. Leitfäden. Bd. 31.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1932. VI, 140 S. RM. 6.—.

Inhalt: Ebene Kurven, Raumkurven, elementare Krümmungstheorie der Flächen, Gauß-Codazzische Gleichungen, Geometrie auf einer Fläche, Flächen konstanter Krümmung, Minimalflächen, Elemente der Tensorrechnung. Das Buch ist durchaus kein bloßer Auszug aus den vielen ausführlichen Differentialgeometriebüchern, sondern enthält trotz seiner Kürze und seines einführenden Charakters vieles Originelle. Einzelheiten der Rechnung werden dem Leser überlassen, aber prinzipielle Schwierigkeiten werden im Gegensatz zu manchen ausführlicheren Büchern nie totgeschwiegen, sondern stets auf möglichst elegante und lehrreiche Art überwunden. Enveloppentheorie, Vierscheitelsatz, Definition des Flächeninhalts, Gauß-Bonnetsche Formel sind Beispiele dafür. Die innere Flächentheorie wird mit den formalen Mitteln der Tensorrechnung begründet, so daß die Verallgemeinerung auf mehrdimensionale Riemannsche Räume keine Schwierigkeit macht. Im allgemeinen wird Vektorrechnung bevorzugt, ohne daß dabei irgendein Methodenfanatismus ausbricht. Was man im Sinne einer einführenden Übersicht vielleicht vermißt, ist die Theorie der Streifen und der Regelflächen. Im übrigen steht der Inhalt des Buches zu seinem Umfang in einem hervorragend günstigen Verhältnis. Die sprachliche Korrektheit wird allerdings dem Ziel der knappen Verständlichkeit prinzipiell geopfert. Das Druckfehlerverzeichnis ist unvollständig. Cohn-Vossen.

● **Kanitani, Jôyô: Géométrie différentielle projective des hypersurfaces.** Ryojun: Coll. Engrg. 1931. 140 S.

Das erste Kapitel enthält die elementare Einleitung. Im zweiten Kapitel wird zuerst mittels der Reihenentwicklung der inhomogenen lokalen Koordinaten die quadratische Form F_2 eingeführt. Die Darbouxschen Quadriken gestatten ein Geradenfeld G (welches nicht in der Hyperfläche liegt) und die kubische Form F_3 abzuleiten. Das dritte Kapitel ist den Pfaffschen Differentialformen gewidmet, welche dem begleitenden Simplex — nach der Cartanschen Methode — zugrunde liegen. Dementsprechend werden auch die notwendigen Begriffe aus dem absoluten Differentialkalkül (in bezug auf nichtholonome Parameter) eingeführt und die Cartanschen Strukturgleichungen mit Hilfe von F_2 und F_3 behandelt. Aus diesen folgen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Konstruktion der Hyperfläche aus F_2, F_3 . $F_3 \equiv 0$ kennzeichnet die Quadriken. Das vierte Kapitel ist den Differenzialinvarianten gewidmet. Somit müssen in erster Reihe die gegenüber der Transformation des begleitenden Simplex invarianten Skalaren gefunden werden. Das Geradenfeld G besitzt developpable Hyperflächen, und die Kurven auf der ursprünglichen Hyperfläche, welche zu den Fokalphunkten auf G führen, sollen als „Leitkurven der ersten Gattung“ (courbes directrices de première espèce) bezeichnet werden. Analoge Bedeutung haben die Leitkurven der zweiten Gattung für die Fokalhyperebenen. Diese Begriffe gestatten einige interessante Interpretationen von $F_2, F_3, F_3/F_2$, auf welche hier nicht eingegangen werden kann. (Die in Nr. 61 abgeleitete Beziehung gilt für die Regelflächen nicht. Ref.) Im fünften Kapitel werden Netze von Leitkurven im Zusammenhang mit anderen Begriffen (asymptotische Abbildung usw.) behandelt. Im sechsten Kapitel werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen angegeben dafür, daß eine Hyperfläche zur Hüllfläche von ∞' Quadriken wird, wenn die Quadriken zugleich Darbouxsche Quadriken der Hüllfläche sind: Der „Rang“ von F_3 muß r sein. Außerdem werden solche Hüllflächen von Quadriken untersucht, welche von den Quadriken in zweiter Ordnung berührt werden. Das letzte Kapitel behandelt die Abbildung von zwei Hyperflächen. Als Hauptsatz kann wohl der folgende bezeichnet werden: Wenn sich zwei Hyperflächen eindeutig aufeinander so abbilden lassen, daß sich nicht nur die asymptotischen, sondern auch die Darbouxschen Kurven entsprechen, so lassen sich beide eindeutig auf eine nicht ausgeartete Quadrik so abbilden, daß sich die asymptotischen Kurven entsprechen. — Selbstverständlich kann man in diesem kurzen Referate nicht auf die Einzelheiten eingehen. Nach dem Vorworte enthält das Buch die Originalresultate, welche teilweise schon in verschiedenen Artikeln veröffentlicht wurden. Dadurch erklärt sich wahrscheinlich die Abwesenheit irgendwelcher Literaturangaben. Hlavatý (Prag).

Hlavatý, V.: Invariants projectifs différentiels d'une courbe dans l'espace projectif P_{n-1} ($n \geq 3$). Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 16, 109—114 (1932).

Eine Kurve C des projektiven $(n-1)$ -dimensionalen Raumes P_{n-1} ist bekanntlich durch die lineare Differentialgleichung
$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_{n-i}(t) \frac{d^i x}{dt^i} = 0 \quad (a_0 = 1)$$
 eindeutig bestimmt, der die homogenen Koordinaten $x = x(t)$ als Funktionen des Parameters t genügen. Es wird für $2 \leq q \leq n$ eine ganze rationale Funktion I_q von a_1, \dots, a_q und

von $a'_1 = \frac{da_1}{dt}, \dots, a'_{q-1}$ definiert mit den folgenden Eigenschaften: 1. wenn man den Parameter t durch $c \cdot t$ (c konstant) ersetzt, multipliziert sich I_q mit c^{-q} ; 2. I_q hängt von a'_1, \dots, a'_{q-1} linear ab; 3. das Polynom I_q ist von n unabhängig; 4. das Polynom I_q ist unabhängig von der Wahl des willkürlichen Faktors der homogenen Koordinaten $x(t)$; 5. die Polynome I_2, \dots, I_n bestimmen (bei gegebenem Parameter t) die Kurve eindeutig. Es wird besonders die Eigenschaft 3. betont. Demgegenüber ist zu bemerken, daß Funktionen mit den Eigenschaften 1., 3., 4., 5. längst bekannt sind (s. Wilczynski, Projective differential geometry, Kap. II, § 2). Doch haben die Funktionen I_q des Verf. den Vorteil, nur von ersten Ableitungen der a_i abzuhängen. Eine explizite Berechnung der I_q ist einer späteren Note vorbehalten. Čech (Brno).

Godeaux, Lucien: Note sur les congruences W . Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 18, 662—671 (1932).

Einer Fläche (x) im gewöhnlichen Raume kann man bekanntlich eine Laplacefolge L_x im fünfdimensionalen Raume zuordnen, so zwar, daß zwei sukzessive Netze der Folge L_x den beiden Systemen asymptotischer Tangenten der Fläche (x) entsprechen. Falls (x) eine Regelfläche ist, bzw. falls die asymptotischen Linien einer Schar von (x) linearen Komplexen angehören, ist die Laplacefolge L_x endlich, und zwar besteht sie aus 4 bzw. 6 Gliedern. — In der vorliegenden Arbeit werden W -Kongruenzen mit den Brennflächen (x) und (y) untersucht, die so beschaffen sind, daß die Laplacefolge L_x endlich ist und aus $2n + 4$ Gliedern besteht. Es wird ohne Rechnung bewiesen, daß dann auch die Laplacefolge L_y endlich ist, und zwar aus $2n + 2$ oder $2n + 4$ oder $2n + 6$ Gliedern besteht. Čech (Brno).

Parkinson, G. A.: Pairs of curves in an S_n . Ann. of Math., II. s. 33, 649—657 (1932).

Verallgemeinerung der Theorie der Bertrandschen Kurvenpaare. Im euklidischen oder Lorentzischen R_n werden Kurvenpaare gesucht, die gemeinsame p -te Normalen haben ($p = 1, \dots, n - 1$), oder solche Paare, bei denen die erste Normale der einen Kurve in der Schmiegeebene oder in der rektifizierenden Ebene der anderen Kurve liegt. Beim ersten Problem ergibt sich u. a., daß für $p \geq 2$ beide Kurven in einem S_p liegen; auch bei den anderen beiden Problemen ergeben sich Dimensionsabschätzungen. — Verf. vergißt zu erwähnen, daß Formel (3,5) seiner Arbeit und alles, was aus ihr folgt, nur für $p \geq 2$ gilt. Nur aus diesem Grunde widersprechen die Ergebnisse dieses Abschnitts nicht der Bertrandschen Theorie. Cohn-Vossen (Köln).

Mirquet, J.: Sur une classe de surfaces admettant un plan tangent continu. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 592—594 (1932).

Bouligand hat gezeigt, daß die Kontingens einer Fläche eben ist, wenn der Schnitt der Paratingens jedes Flächenpunktes mit einer Kugel um diesen Punkt keine inneren Punkte besitzt. Es wird nun gezeigt, daß dann auch die Paratingens eben ist.

Willy Feller (Kiel).

Beckenbach, E. F.: The area and boundary of minimal surfaces. Ann. of Math., II. s. 33, 658—664 (1932).

Wird ein Kreis durch die nichtlineare Funktion $f(z)$ auf einen anderen Bereich abgebildet, so gibt es für den Flächeninhalt des Bildbereiches eine von Bieberbach herrührende Abschätzung. Verf. schätzt ähnlich den Flächeninhalt eines Minimalflächenstückes ab, ausgehend von der Weierstraßschen Abbildung der Fläche auf den Kreis. — Ferner wird für den Flächeninhalt A noch die Ungleichung $A \leq L^2/4\pi$ abgeleitet, wobei L die Länge der begrenzenden Kurve bedeutet. Willy Feller.

Haenzel, Gerhard: Über die zeitlich veränderliche Metrik. Mh. Math. Phys. 39, 399—402 (1932).

Verf. betrachtet den projektiven Raum als Substrat einer zeitlich veränderlichen Cayleyschen Metrik von solcher Art, daß die Fundamentalfächen mit der Zeit ein Büschel (ganz oder teilweise) durchlaufen. Je nach der Basiskurve 4. Ordnung des

Büschels ergeben sich verschiedene Fälle; z. B. ergibt sich die Vorstellung des „sich ausdehnenden“ sphärischen Raums, wenn man von einem Büschel nullteiliger F_2 ausgeht, die einander längs eines festen nullteiligen Kegelschnittes berühren. Geometrisch besonders interessant ist ein anderer Sonderfall, nämlich daß die Basiskurve aus einem geradlinigen Raumvierseit besteht. *Cohn-Vossen* (Köln).

Haenzel, Gerhard: Zeitlich veränderliche Metrik. *Mh. Math. Phys.* **39**, 267—278 (1932).

Ausgestaltung des im vorstehenden Referat zuletzt genannten Falls. Es wird die Jollesche Theorie auf die linearen Gradenkongruenzen angewandt, die zwei Gegenkanten des Vierecks zu Leitgeraden haben. Die zeitlich veränderliche Metrik bedingt eine sekundäre Involution in diesen beiden Kongruenzen. *Cohn-Vossen* (Köln).

Andreoli, Giulio: Parallelismi trasporti rigidi, riferimenti locali nelle V_2 . *Ann. Scuola norm. super. Pisa*, II. s. **1**, 315—332 (1932).

In jedem Punkt der zweidimensionalen Zahlenmannigfaltigkeit V_2 sei eine Winkelmessung eingeführt. Dann läßt sich der Parallelismus so erklären: Irgendein System von ∞^2 Kurven derart, daß im Kleinen durch zwei Punkte genau eine Systemkurve geht, heißt das System der Autoparallelen. Richtungen in zwei Punkten heißen parallel, wenn sie mit der verbindenden Autoparallelen gleiche Winkel in gleichem Sinne bilden. Ein Parallelismus heißt absolut, wenn zwei einer dritten Richtung parallele Richtungen stets einander parallel sind. Dann läßt sich das Netz der Autoparallelen in ∞^1 Scharen zerlegen, so daß jede Schar aus Isogonaltrajektorien jeder anderen Schar besteht. Von einem Parallelismus p (absolut oder nicht) kann man zu einem anderen, p_1 , folgendermaßen übergehen: Man geht von zwei Punkten P, Q aus, in denen zwei gemäß p parallele Richtungen a, b , gegeben sind; dann muß man b um einen Winkel w_1 drehen, um b in die gemäß p_1 zu a parallele Richtung überzuführen. w_1 hängt nicht von a , sondern außer von p, p_1 nur von P, Q ab, und zwar ist $w_1(P, Q) + w_1(Q, P) = 0$. Ist p_2 ein weiterer Parallelismus, der in analoger Weise aus p durch den Winkel $w_2(P, Q)$ hervorgeht, so heißt der zum Winkel $w_1 + w_2$ gehörige Parallelismus die Summe von p_1 und p_2 (bez. p). Ist p absolut, so ist auf jedem geschlossenen Weg das Residuum von $p_1 + p_2$ gleich der Summe der Residuen von p_1 und von p_2 . Residuum eines Parallelismus auf einem geschlossenen Weg heißt der Winkel, den eine längs des Weges parallel verschobene Richtung nach Durchlaufung des ganzen Weges mit der Ausgangsrichtung bildet. Durch das Verschwinden aller Residuen sind die absoluten Parallelismen ausgezeichnet. — Sei nun außerdem in V_2 ein Riemannsches Linienelement definiert und sei die Winkelmessung die zugehörige, so tritt neben das System der Autoparallelen das System der geodätischen Linien, das im allgemeinen von dem der Autoparallelen verschieden ist. Neben den Begriff der geodätischen Krümmung einer Kurve tritt dann der in gewissem Sinn dazu duale Begriff der p -Krümmung der Kurve bezüglich des gegebenen Parallelismus. Beim definierenden Grenzübergang steht im Nenner beide Male der geodätische Abstand benachbarter Kurvenpunkte. In den Zähler kann man bei der geodätischen Krümmung den Winkel der Tangente mit der Sehne setzen, während bei der p -Krümmung der auf p bezogene Winkel benachbarter Tangentialrichtungen im Zähler steht. Neben die Gaußsche Krümmung von V_2 in einem Punkt tritt infolgedessen ein weiterer Krümmungsbegriff, indem man beim Grenzübergang das Integral der geodätischen Krümmung durch das p -Residuum ersetzt. Die Torsion von V_2 hinsichtlich p wird in der üblichen Weise erklärt. Man kann aus diesen allgemeinen Definitionen einfache Kriterien dafür ableiten, wann eine V_2 ∞^2 oder ∞^1 Abbildungen in sich besitzt, die isometrisch sind und zugleich den Parallelismus erhalten. Auch beim Übergang von einem Parallelismus zum andern bei festgehaltener Metrik ergeben sich einfache Gesetze, wie die erwähnten Krümmungsgrößen sich ändern. — Es sind weitere Arbeiten angekündigt, die die angegebenen Begriffe analytisch einkleiden und auf mehr Dimensionen übertragen sollen.

Cohn-Vossen (Köln).

Chapiro, H.: Sur la transplantation du transport parallèle. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 16, 92—94 (1932).

Zwei Flächen S und \hat{S} in E_3 seien derart aufeinander abgebildet, daß die Tangentialebenen in entsprechenden Punkten P und \hat{P} parallel sind. Jedem Vektor v^h ($h, \dots, m = 1, 2$) von S wird dadurch ein Vektor $\hat{p}^c_h v^h$ von \hat{S} zugeordnet. [Die Größe \hat{p}^c_h , sowie die reziproke p^h_c , liegt mit dem Index h in S , mit dem Index c in \hat{S}]. Sind die beiden Flächen (unabhängig voneinander) eingespannt, so wird in jeder eine affine Übertragung induziert. Überdies wird die in S induzierte Übertragung durch die Abbildung nach \hat{S} „transplantiert“, wodurch auf \hat{S} eine zweite lineare Übertragung bestimmt wird. Verf. bestimmt die Differenz der Parameter der beiden Übertragungen in \hat{S} ; diese ist das allgemeine Produkt des über einem Index mit p^i_b überschobenen Gaußschen (zweiten) Fundamentaltensors und der Überschiebung des Einheitsaffinors \hat{B}^a_c von \hat{S} in \hat{P} mit der Pseudonormalen in P . Sind die Pseudonormalen in P und \hat{P} gleich, so fallen die beiden Übertragungen in \hat{S} natürlich zusammen. Im allgemeinen ist die „transplantierte“ Übertragung nicht symmetrisch. [Verf. benutzt eine „partielle“ kovariante Ableitung, die er M. Pastori (1930) zuschreibt. Diese ist aber nichts anderes als die kovariante Ableitung einer Größe mit abgedrosselem Index und kommt schon 1929 bei J. A. Schouten vor.] D. van Dantzig (Delft).

Topologie :

Aronszajn, N.: Sur les invariants des transformations continues d'ensembles. Fundam. Math. 19, 92—142 (1932).

The author considers an arbitrary topological property W of a set M in a metric space E^0 with metric ρ^0 subject only to the following conditions: (α) any set consisting of a single point if E^0 always has property W , and (β) if each of two sets M_1 and M_2 have property W and $M_1 \cdot M_2 \neq 0$, then $M_1 + M_2$ has property W . Examples of such are the properties W_0 , W_1 , and W_2 , considered in particular by the author, of being connected, of being a continuum, and of being a locally connected continuum respectively. With the aid of any such property W , a transfinite sequence of metric spaces is set up as follows: Set $(\rho^{W,0}) = (\rho^0)$ and $E^{W,0} = E^0$. Then, supposing the metric $(\rho^{W,x})$ and the spaces $E^{W,x}$ (of diameter ≤ 1) have been defined for all $x < \alpha$, for each pair of points x, y we set $\rho^{W,\alpha}(x, y) = \max_{x < \alpha} [\min \delta^{W,x}(M^x)]$, where M^x runs

through all subsets of the space which contain $x + y$ and have property W , and set $\rho^{W,\alpha}(x, y) = 1$ when for some $x < \alpha$ there are no such sets M^x . It is shown that, for all α 's, $(\rho^{W,\alpha})$ has distance character; and there follows a systematic development of the properties of any relations between the spaces $E^{W,\alpha}$ including some results obtainable when the property W is further restricted so as to satisfy the condition (γ) “if M has property W and if f is a continuous transformation of E , then $f(M)$ also has property W with respect to the space $f(E)$ ”, or condition (λ) “every space having property W also has property W locally”. In particular, it is shown that a necessary and sufficient condition for the metric $(\rho^{W,\alpha})$, for a given α , to be equivalent to $(\rho^{W,\alpha+1})$ is that the space $E^{W,\alpha}$ possess the property W locally. If in addition to satisfying (α), (β), (γ), the property W is such that (δ) when each of a sequence $[M_n]$ of sets con-

verging to a point x and forming a chain has property W , so also does the set $x + \sum_1^\infty M_n$, the author proves that when E^0 is a complete space, so also is $E^{W,\alpha}$ for every α ; and likewise when E^0 is an absolute G_δ , so also is every $E^{W,\alpha}$. The author then considers invariant and so called semi-invariant properties (i. e., with respect to continuous transformation) and shows that the operation of obtaining the space $E^{W,\alpha}$ from E^0 yields a transfinite sequence of invariant and semi-invariant properties corresponding to any given invariant or semi-invariant property respectively. In the second part

of the paper these results are applied to yield solutions to a number of problems concerning continuous transformations, in particular to the problem of the existence of a class of power c of continua no one of which is the continuous image of any other (see also Waraszkiewicz, *Fundam. Math.* 18, 118; this *Zbl.* 4, 226). *G. T. Whyburn.*

Mazurkiewicz, Stefan: Sur les transformations intérieures. *Fundam. Math.* 19, 198—204 (1932).

A continuous transformation f of a space R into a space T is said to be an interior transformation of R provided that for every set U which is open in R , $f(U)$ is open in $f(R) = T$ (see Stoilow, *Ann. École norm.* 1928, 348). Now it is known, by virtue of a theorem of Lavrentieff [*Fundam. Math.* 6, 149—150 (1924)], that any homeomorphism between two given subsets of a complete space can always be extended to a homeomorphism between G_δ -sets containing these sets. The author proves the following analogous proposition concerning interior transformations: If R , T are two separable, complete spaces, A is any subset of R and f is an interior transformation of A such that $f(A) \subset T$, then there exists in R an absolute G_δ -set A_1 containing A and an interior transformation f_1 of A_1 such that $f_1(A_1) \subset T$ and $f_1(x) = f(x)$ for every point x of A .

G. T. Whyburn (Baltimore).

Borsuk, Karol: Über eine Klasse von lokal zusammenhängenden Räumen. *Fundam. Math.* 19, 220—242 (1932).

Sei A eine Teilmenge eines metrischen Raumes T . Existiert eine Umgebung U von A und eine eindeutige, stetige Abbildung von U auf A , bei welcher jeder Punkt von A auf sich selbst abgebildet wird, so heißt A ein Umgebungsretrakt von T . Eine in sich kompakte metrisierbare Menge, die in jedem sie enthaltenden Raum Umgebungsretrakt ist, nennt Verf. eine \mathfrak{R} -Menge. Jede \mathfrak{R} -Menge bzw. endlichdimensionale \mathfrak{R} -Menge ist homöomorph zu einem abgeschlossenen Umgebungsretrakt des Q_ω bzw. eines euklidischen Raumes. Ist A eine \mathfrak{R} -Menge und $B \subset A$ in A abgeschlossen und ein Umgebungsretrakt in A , so ist B eine \mathfrak{R} -Menge. Sind A_1 und A_2 in $A = A_1 + A_2$ abgeschlossen und ist $A_1 \cdot A_2$ eine \mathfrak{R} -Menge, so ist A genau dann eine \mathfrak{R} -Menge, wenn A_1 und A_2 \mathfrak{R} -Mengen sind. (Also ist jeder Komplex eine \mathfrak{R} -Menge.) Ist A eine \mathfrak{R} -Menge des euklidischen R_n , so ist $R_n - A$ Vereinigung endlichvieler Gebiete G_i ; jeder Begrenzungspunkt eines G_i ist von G_i aus erreichbar; die Begrenzung von A ist lokal zusammenhängend. Ein topologischer Raum heißt lokal zusammenziehbar, wenn jede Umgebung U eines jeden Punktes p eine Teilumgebung V von p enthält, die innerhalb U stetig auf p zusammengezogen werden kann. Jede \mathfrak{R} -Menge ist lokal zusammenziehbar. Unter den endlichdimensionalen Punktmengen sind die \mathfrak{R} -Mengen als metrisierbare, in sich kompakte und lokal zusammenziehbare Punktmengen charakterisiert. Vgl. dies. *Zbl.* 4, 21.

Nöbeling (Wien).

Kuratowski, Casimir: Sur un problème topologique concernant les systèmes „strictement transitifs“. *Fundam. Math.* 19, 252—256 (1932).

Der Verf. betrachtet die Zusammenhänge zwischen dem Birkhoffschen Begriff der starken Transitivität (Birkhoff, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 17, 650 und 656; vgl. dies. *Zbl.* 3, 256) und dem Begriff eines unzerlegbaren Kontinuums.

Schnirelmann (Moskau).

Alexits, Georg v.: Über das topologische Produkt der im kleinen zusammenhängenden Räume. *Mh. Math. Phys.* 39, 263—266 (1932).

Un espace E est dit d'après K. Menger connexe au degré $\geq n$, si, quelle que soit la décomposition de E en 2 sous-ensembles fermés A et B , où $A \neq E \neq B$, leur partie commune $A \cap B$ contient un ensemble connexe au degré $\geq (n-1)$, la connexité au degré 0 étant considérée comme celle des espaces composés d'un seul point. Après avoir introduit la notion de connexité locale au degré $\geq n$ dans un point p , à savoir comme l'existence d'un entourage aussi petit que l'on veut de p et qui soit connexe au degré $\geq n$, l'auteur démontre le th. suivant: le produit combinatoire de n espaces quasi-péaniens (c.-à-d. complets, connexes et localement connexes) et contenant chacun

plus d'un point est un espace (quasi-péanien) connexe au degré $\geq n$ (donc en particulier de dimension $\geq n$) et localement connexe au degré $\geq n$. *B. Knaster.*

Hayden, H. A.: Sub-spaces of a space with torsion. Proc. London Math. Soc., II. s. 34, 27—50 (1932).

The author studies linear displacements with torsion tensor $S_{\beta\gamma}^{\alpha}$ different from zero, and metric tensor $g_{\alpha\beta}$. If we call such a manifold V_n , he considers sub-manifolds V_m in V_n , with induced torsion tensor and metric tensor. Such a V_m has, with respect to V_n , a curvature tensor Ω_{ij}^{α} . Several properties on lines of curvature, relative curvature and geodesic sub-manifolds are generalized for such V_m in V_n . Some related properties of V_l in V_m in V_n , ($l < m < n$) follow. A special object of study are such V_l , of which the first normal space with respect to V_n is tangential to V_m at every point. Such V_l are called asymptotic sub-spaces (of the first order) of V_m in V_n . These V_l are also generalized to asymptotic sub-spaces of order p , if the first p normal spaces relative to V_n are all tangential to V_m . *Struik (Cambridge).*

Astronomie und Astrophysik.

● **Handbuch der Astrophysik.** Hrsg. v. G. Eberhard, A. Kohlshütter und H. Ludendorff. Bd. 5, 1. Hälfte. Das Sternsystem. Tl. 1. Bearb. v. Fr. Becker, A. Brill, R. H. Curtiss † u. K. Lundmark. Berlin: Julius Springer 1932. X, 574 S. u. 173 Abb. RM. 96.—.

Becker, Friedrich: Das lokale Sternsystem. Erg. exakt. Naturwiss. 11, 1—30 (1932).

An Hand der Arbeiten, die für die Entwicklung des Begriffes „Lokales Sternsystem“ von besonderer Bedeutung gewesen sind, wird ein zusammenfassender Bericht über unsere Vorstellung von dem Aufbau des engeren Sternsystems gegeben. Einem kurzen Hinweis auf ältere Arbeiten folgt eine Darstellung der Untersuchungen von Charlier und Shapley, die das Gerippe des lokalen Systems, die Gruppe der B-Sterne, und seine Lage im größeren Milchstraßensystem, dem System der Kugelhaufen, klarstellten. Auf den Einfluß der interstellaren Absorption wird hingewiesen an Hand der Untersuchungen von Trümpler über offene Sternhaufen und der Arbeiten von Seares, der aus dem Material der Selected Areas die Zweiteilung in engeres und größeres galaktisches System herausfand. Eine eingehende Würdigung erfährt der Versuch Pannekoeks, das schematische glatte Bild des engeren Sternsystems aufzulösen und den Einfluß örtlicher Verdichtungen, Sternleeren und Absorptionsgebiete zu erfassen. Den Schluß bildet die Diskussion der Ansätze zur Dynamik des Systems, wobei auf Auswege aus den Schwierigkeiten aufmerksam gemacht wird, die sich aus der Oort'schen Hypothese einer allgemeinen ungleichförmigen Rotation des Milchstraßensystems für die Existenzmöglichkeit eines lokalen Systems ergeben. *Siedentopf (Jena).*

Bottlinger, K. F.: Die Rotation der Milchstraße. Erg. exakt. Naturwiss. 11, 31—63 (1932).

Im 1. Abschnitt wird eine kurze Übersicht der stellarstatistischen Methoden gegeben und die komplizierende Einwirkung der Absorption besprochen. Der Verf. ist der Meinung, daß die Methode der Stellarstatistik mit Hilfe der Sternzählungen nur in der allernächsten Umgebung der Sonne etwas aussagen kann. — Im 2. Abschnitt werden die verschiedenen Bewegungserscheinungen, die wir in unserer unmittelbaren Umgebung beobachten, besprochen. Drei dieser Bewegungskategorien sind an die Begriffe Sonnenapex, Vertex und Asymmetrie gebunden. Dazu kommt der von Freundlich und von der Pahlen entdeckte Gang der Radialgeschwindigkeiten der B-Sterne in der Milchstraße mit galaktischer Länge, dessen Amplitude der Entfernung proportional ist. Durch die Einführung der von Lindblad und Oort vorgeschlagenen Erklärung lassen sich sämtliche Bewegungserscheinungen zwangsläufig deuten. — Danach ist das ganze galaktische System um das Zentrum im Sagittarius in starker Rotation begriffen, aber nicht wie ein starrer Körper, sondern es rotieren die inneren Teile rascher als die äußeren. Nachdem der Verf. die Grundgedanken von Lindblad und Oort besprochen hat, behandelt er im 3. Abschnitt die differentielle Rotation. Dabei werden die verallgemeinerten Formeln Oorts abgeleitet. Sind die beobachteten Distanzen (r) klein gegen den Abstand vom Zentrum (R), so kommt man auf die Ausdrücke von Oort zurück. Eine

Diskussion der Radialgeschwindigkeitskurven als Funktionen der galaktischen Länge (l) für verschiedene Entfernungen von der Sonne zeigt, daß man für $r/R = 1$, $l = 0$ unendliche Werte erhält. Die Kurve ist hier nur eine einzige Welle, die allerdings von der Sinuskurve abweicht. Für die kernnahen Objekte ($r/R \approx 1$) ist nach der Formel ein Vorzeichensprung von Minus auf Plus vorhanden, in Wirklichkeit hat man einen raschen Übergang von großen negativen zu großen positiven Werten zu erwarten. — Im 4. Abschnitt werden die Bewegungen betrachtet, wie sie vom Standpunkt eines in Kreisbahn umlaufenden Sternes aussehen müssen, dabei wird die Forderung, daß alle Bahnen im System Kreisbahnen seien, aufgegeben. Um das Geschwindigkeitsdiagramm zu konstruieren, bedient sich der Verf. einer von Freundlich und von der Pahlen abgeleiteten Formel

$$v^2 = \frac{k}{R} \left(1 \pm \frac{\sqrt{e^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta} \right),$$

die für den Abstand R vom Zentrum die Geschwindigkeit (v) nach Richtung und Größe mit der Exzentrizität (e) verbindet, θ ist hier der Winkel, welchen die Geschwindigkeit mit der Kreisbahn bildet. Zu jedem Punkte des Diagramms gehört eine bestimmte Halbachse und eine bestimmte Exzentrizität. Für kleine Exzentrizitäten sind Kurven $e = \text{konst.}$ genäherte Ellipsen, für größere Werte von e weichen sie stark von der Ellipsenform ab. Es erweist sich, daß die Kurven gleicher Sterndichte nicht mit den Kurven $e = \text{konst.}$ übereinstimmen. Ihre Schwerpunkte werden gegen den Nullpunkt des Geschwindigkeitsdiagramms verschoben, und zwar um so mehr, je größer sowohl die Dichtezunahme als die Streuung der Exzentrizitäten ist. An Hand des Geschwindigkeitsdiagramms läßt sich, wie der Verf. zeigt, dasselbe Bild wie Strömbergs empirische Figuren entwerfen. — Im 5. Abschnitt werden die Verhältnisse besprochen, die sich bei einem dreidimensionalen Geschwindigkeitskörper ergeben. Im 6. Abschnitt wird der Vergleich der Theorie mit dem Beobachtungsmaterial durchgeführt. Der Verf. benutzt dabei teilweise die von ihm selbst errechneten Daten. Im allgemeinen ist die Theorie mit den Beobachtungen im guten Einklang. Einige Einwände, die gegen die Rotationstheorie erhoben werden, sind diskutiert. Es wird dann ein zusammenfassendes Bild von dem Sternsystem dargestellt, und schließlich ist im letzten Abschnitt ein Schema des Systems gegeben.

L. Hufnagel (Berlin).

Bottlinger, K. F.: Sternzahlen und interstellare Absorption. *Z. Astrophys.* 5, 50–53 (1932).

Der Verf. untersucht den Einfluß der Absorption auf die Sternzahlen unter Annahme einer konstanten Sterndichte und konstanten absoluten Helligkeit. Es werden drei Arten der Absorption behandelt: 1. Im Falle einer kontinuierlichen Absorption ist die Beziehung zwischen absoluter und scheinbarer Größe und der Entfernung bei konstanter Absorption λ gegeben durch

$$m - M + 5 = 5 \log r + \gamma r,$$

wo $\gamma = 2,5 \lambda \log e = 1,084 \lambda$ ist. Für die Anzahl der Sterne von der scheinbaren Größe m erhält man die Formel

$$a(m) = \frac{C \omega}{5 \log e} \frac{r^3}{1 + \frac{\gamma r}{2}},$$

wo ω den Öffnungswinkel und C eine Konstante bedeutet. — 2. Im Falle einer diskontinuierlichen Auslöschung empfängt der Beobachter nur den Teil des Sternlichtes $(1 - \kappa)^r \approx e^{-\kappa r}$. Zwischen Helligkeit und Entfernung besteht die Beziehung

$$m - M + 5 = 5 \log r,$$

da außerhalb der absorbierenden Wolken keine Absorption existieren soll. Die beobachtbare Sternzahl ist dann durch

$$a'(m) = \frac{C \omega}{5 \log e} r^3 e^{-\kappa r}$$

gegeben. — 3. Im Falle einer gemischten Absorption erhält man

$$a''(m) = \frac{C \omega}{5 \log e} r^3 \left(1 + \frac{\lambda r}{2} \right)^{-1} e^{-\kappa r},$$

$$m - M + 5 = 5 \log r + 2,5 \log e \cdot \lambda r.$$

Die drei Fälle werden durch Beispiele illustriert.

L. Hufnagel (Berlin).

Hopf, Eberhard: Remarks on the Schwarzschild-Milne model of the outer layers of a star. II. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **92**, 863–868 (1932).

The author has previously [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **90**, 287 (1930)] shown that the solution Milne's problem is

$$B(\tau) = \frac{3}{4} F(\tau + \varphi(\tau)),$$

where πF is the constant net flux of radiation, and $\varphi(\tau)$ is the solution of

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \varphi(t) E_1(|\tau - t|) dt + \frac{1}{2} E_3(\tau), \quad E_{in}(\tau) = \int_0^\infty \frac{e^{-s\tau}}{s^n} ds. \quad (n \geq 0)$$

The function $\varphi(\tau)$ is uniquely determined; and he now shows, by considering the class of all nowhere decreasing functions $\psi(\tau) > 0$ such that

$$\psi(\tau) \geq \frac{1}{2} \int_0^\infty \psi(t) E_1(|\tau - t|) dt + \frac{1}{2} E_3(\tau), \quad n \geq 0$$

and proving that it possesses a smallest member for which the equality holds, that $\varphi(\tau)$ is an increasing function. He deduces

$$0.577 < \varphi(\tau) < 0.715, \quad 0 \leq \tau < \infty.$$

The usual first approximation is $\varphi_1(\tau) = \frac{2}{3}$. He shows also that the usual first approximation to the law of darkening $I_1(0, \theta) = \frac{3}{4} F \{ \cos \theta + \frac{2}{3} \}$ gives a value a little less than the true $I(0, \theta)$ for small θ , and a little greater as θ approaches $\pi/2$.

W. H. McCrea (London).

Teegan, J. A. C.: The equilibrium between matter and radiant energy. Philos. Mag., VII. s. **14**, 415–418 (1932).

Treating the process of annihilation of a proton (M_H) and an electron (M_E) represented by $M_H + M_E \rightleftharpoons h\nu/c^2$, where ν is the frequency of the resulting photon, as analogous to a chemical transformation, the author uses van't Hoff's isochore to derive the equilibrium constant K . He finds $K = \text{const } e^{-h\nu/kT}$. Therefore, in order that the reverse reaction representing the condensation of radiation into matter may proceed to an appreciable extent, a temperature of the order of $c^2(M_H + M_E)/k$, or 10^{12} deg. is required.

W. H. McCrea (London).

Page, Leigh: Momentum relations in crossed fields. Physic. Rev., II. s. **42**, 101 bis 107 (1932).

In his theory of stellar rotation Ross Gunn supposes that a star possesses electric and magnetic fields which communicate momentum to ions formed in its atmosphere. This momentum is transferred by collisions to the star as a whole, which is thus supposed to acquire continually increasing angular momentum. The author shows that this continual increase is impossible, since conservation of linear and angular momentum (electromagnetic and mechanical together) must hold for any isolated system. He illustrates this first by the case of uniform crossed electric and magnetic fields, and shows in detail that the increase of mechanical momentum of ions moving in the combined field is at the expense of the original electromagnetic momentum. This result is unaltered in relativity mechanics. As a second example he proves the same result for the angular momentum of ions moving in the field of a uniformly magnetised charged sphere.

W. H. McCrea (London).

Steensholt, Gunnar: On the transmutation of elements in stars. Z. Astrophys. **5**, 140–152 (1932).

The author uses the equations of hydrostatic equilibrium of a star given by Rosse-land [Z. Astrophys. **4**, 255 (1932); this Zbl. **4**, 287]. He supposes the source of energy-generation to be the capture of protons by other atomic nuclei, in the manner suggested by Atkinson and Houtermans, and Atkinson. He re-calculates the probabilities for this process by the wave-mechanical method of Wilson [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **91**, 283 (1931); this Zbl. **1**, 110]. The equations of stellar equilibrium have to be

solved by numerical quadratures. The examples worked out show that it is possible to build up stellar models of the kind considered assuming internal temperatures of the order given by Eddington, and having radii and luminosities of the observed order of magnitude. The density distribution is convectively unstable in the manner discussed by Rosseland. The results given are largely preliminary.

W. H. McCrea (London).

Klauder, H.: Der Polytropenindex in rotierenden Sternen. *Astron. Nachr.* **246**, 409—412 (1932).

The author has previously [*Astron. Nachr.* **246**, 1 (1932); this *Zbl.* **4**, 421] discussed the luminosity of a rotating star composed of a perfect gas. He uses this work to evaluate the polytropic index for such a star. He shows that for uniform angular velocity ω the index for a rotating star is greater than for a non-rotating star, and discusses the cases for ω varying throughout the star. W. H. McCrea (London).

Struve, Otto: Thermal Doppler effect and turbulence in stellar spectra of early class. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **18**, 585—589 (1932).

Turbulente Bewegungen der stellaren Gase führen zu einer Verbreiterung des Dopplerkerns der Absorptionslinien. Verf. führt γ Pegasi (B2) und τ Scorpii (B0) als typische Beispiele dafür an, daß bei Abwesenheit von Rotationsverbreiterung die Breite der He-Linien durch den thermischen Dopplereffekt allein erklärt werden kann. Atmosphärische Turbulenz scheint keine generelle Eigenschaft der frühen Spektraltypen und die häufige Verwaschenheit der Linien dieser Sterne auf Rotation zurückzuführen zu sein.

R. Wildt (Göttingen).

Gleissberg, W.: Interstellare Diffusion als Ursache der Farbenexzesse. *Astron. Nachr.* **246**, 329—340 (1932).

Wenn die interstellare Absorption durch Streuung des Lichtes an kleinen Teilchen nach dem Rayleighschen λ^4 -Gesetz bewirkt wird, so muß zwischen der Absorption (in Größenklassen pro 1000 pars) im visuellen Gebiet $A_p(\tilde{\lambda} = 5600 \text{ \AA})$ und im photographischen Gebiet $A_p(\tilde{\lambda} = 4400 \text{ \AA})$ eine Beziehung bestehen, die in erster Näherung lautet

$$\frac{A_p}{A_v} = \left(\frac{5600}{4400} \right)^4.$$

In zweiter Näherung wird die Intensitätsverteilung im Sternspektrum und der Verlauf der Empfindlichkeitsfunktionen berücksichtigt, wobei eine geringe Zunahme des Farbenexzesses $E = A_p - A_v$ mit steigender Temperatur herauskommt. Die Beobachtungen über interstellare Absorption von Schalén, Trümpler, Elvey u. a. scheinen innerhalb der Genauigkeitsgrenzen eine Bestätigung des λ^4 -Gesetzes zu geben. — Unter der Annahme, daß die Streuung an festen Partikeln mit dem Brechungsindex $n = 1,5$ stattfindet, erhält Verf. für die Zahl der streuenden Partikel die Größenordnung 10^{-2} bis 10^{-3} pro Kubikzentimeter.

Siedentopf (Jena).

Relativitätstheorie.

Mellin, Hj.: Das Zeit-Raum-Problem. *Ann. Acad. Sci. Fennicae A* **34**, Nr 3, 1—23 (1932).

Lewis, T.: Some special solutions of the equations of axially symmetric gravitational fields. *Proc. Roy. Soc. London A* **136**, 176—192 (1932).

In Ergänzung zu den Untersuchungen von Weyl, Levi-Civita, Andress, Akeley u. a. zum Problem der statischen bzw. stationären Lösungen der Gravitationsgleichungen mit Axial-Symmetrie stellt Verf. eine spezielle Klasse exakter Lösungen auf. Weiterhin wird eine Methode sukzessiver Approximation angegeben, bei der vorgegebene Randwerte auf einer alle Materie ausschließenden Rotationsfläche und Regularität im Unendlichen eingehalten werden können. Als Anwendungsbeispiel wird die zweite Approximation des Feldes einer rotierenden Kugel behandelt. Lanczos.

Ghosh, J.: Gravitational field of a homogeneous sphere. *Indian Phys.-Math. J.* **3**, 139—142 (1932).

Starting with the field-equations $K_{pq} - \frac{1}{2}g_{pq}K + \beta g_{pq} = -8\pi T_{pq}$ (β the cosmological constant and T_{pq} the material-energy-tensor), the author obtains a solution of the problem of the homogeneous sphere on the assumptions that the density T^4_4 is constant and that the radial and transverse stresses are linearly related ($T^2_2 = m T^1_1 + n$, where m, n are constants; the field-equations give $T^2_2 = T^3_3$, since the field is spherically symmetrical). His solution is more general than the well-known one due to Schwarzschild, and is in fact

$$ds^2 = \Phi(r) dt^2 - [(1 - ar^2)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2],$$

where a is a constant and $\Phi(r)$ is a power-series in r which terminates if m, n satisfy a certain linear equation.

H. S. Ruse (Edinburgh).

Hoffmann, B.: On the spherically symmetric field in relativity. *Quart. J. Math., Oxford Ser. 3*, 226—237 (1932).

With suitably chosen units, the field equations of general relativity in the absence of matter are $R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + E_{ab} = 0$ and $\partial(F^{ab}\sqrt{-g})/\partial x^b = 0$, where R_{ab} is the Ricci tensor, F^{ab} the electromagnetic six-vector and E_{ab} the electromagnetic energy-tensor. The author shows that a spherically symmetric field of gravitation and electromagnetism is necessarily static, and that, in the absence of matter, spherically symmetric waves cannot exist. The most general spherically symmetric field outside matter is in fact shown to be $ds^2 = P dt^2 - P^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$, where $P = 1 - 2mr^{-1} + \frac{1}{2}(\varepsilon^2 + \mu^2)r^{-2}$, the constants m, ε, μ giving respectively measures of the mass, electric charge and "magnetic pole-strength" of the matter around the origin which produces the external field. These conclusions are valid not only for general relativity, but also for the Veblen-Hoffmann projective theory (with zero index), the Einstein-Mayer unified theory of 1931, and the Kaluza-Klein five-dimensional theory.

H. S. Ruse (Edinburgh).

Cimino, M.: Sulla legge delle aree di un moto einsteiniano considerato nell'ordinario spazio euclideo. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **16**, 120—126 (1932).

A discussion of the motion of a particle in the Schwarzschild gravitational field, the problem being reduced to one in the classical theory of attractions. The principal equation obtained (corresponding to the "integral of areas" $r^2 \dot{\theta} = \text{const.}$ in the classical theory), is capable of interpretation as a law of areas for an Einsteinian motion in an ordinary Euclidean space (not space-time), upon which the Einsteinian space may be conformally represented.

H. S. Ruse (Edinburgh).

Pycha, Zeno: Geometria del cronotopo quantistico. *Atti Pontif. Accad. Sci. Nuovi Lincei* **85**, 165—183 (1932).

Darstellung einer quantenhaft umgedeuteten Differentialgeometrie vom Weylschen Typus, bei dem die üblicherweise als Skalare betrachteten metrischen Größen in Form von Matrizen auftreten (vgl. dies. Zbl. **5**, 90).

Lanczos (Lafayette).

Narliker, V. V.: A world criterion. *Philos. Mag.*, VII. s. **14**, 433—436 (1932).

Verf. schlägt vor, nur solchen Singularitäten der Einsteinschen Feldgleichungen einen Massenpunkt zuzuordnen, welche die Weltkrümmung $R = g^{ik} R_{ik} = \kappa T + 4\lambda$ ungeändert lassen; so, wie in der Umgebung des „Massenpunktes“ der Schwarzschild-schen Lösung immer $R = 4\lambda$ ist. Er behandelt λ nicht als Konstante. *Heckmann.*

Kunii, Shūjiro: On the solutions of the cosmological field equations and some models of the universe with annihilation of matter. *Mem. Coll. Sci. Kyoto A* **15**, 97—111 (1932).

Vermutlich ohne Kenntnis zahlreicher Arbeiten über den gleichen Gegenstand kommt Verf. zu einem Teil der schon bekannten Resultate. Obwohl das Linienelement in der Form

$$ds^2 = -R(t)^2[d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi d\psi^2] + F(\vartheta, t)^2 dt^2$$

angenommen wird, werden nämlich durch die weitere Annahme, daß die Energieströmung verschwinde ($T_{i4} = T_{4i} = 0$, $i = 1, 2, 3$), nur die bekannten Fälle $dR/dt = 0$ und $\partial F/\partial \vartheta = 0$ erhalten.

Heckmann (Göttingen).

Schouten, J. A., und D. van Dantzig: Zur generellen Feldtheorie. Diracsche Gleichungen und Hamiltonsche Funktion. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **35**, 843 bis 852 (1932).

In Fortsetzung einer früheren Untersuchung (vgl. dies. Zbl. **5**, 90) zeigen Verff., daß die projektivierte Diracsche Gleichung sich auf eine Form bringen läßt, die nur den „Impulsenergiepunkt“ enthält. Die Operatoren der Diracschen Gleichung können dann leicht interpretiert werden, und eine Unbestimmtheit in der Spingröße ψ^c verschwindet. Aus dieser Form der Gleichung ergibt sich eine Hamiltonsche Funktion, die bis auf den Faktor $1/2m$ nichts anderes ist, als das skalare Produkt dieses Punktes mit dem ebenfalls auf der Fundamentalquadrik liegenden konjugierten Punkt. Diese Hamiltonsche Funktion liefert die richtigen kanonischen Gleichungen für die Weltlinien. Es wird schließlich der Zusammenhang zwischen den gewöhnlichen nicht homogenen Weltkoordinaten und den homogenen Koordinaten aufgezeigt.

Lanczos.

Straneo, P.: Nuova teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità a geometrizzazione assoluta. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **15**, 462—470 (1932).

Wiederholte Darstellung der allgemeinen Grundlagen und der vorgeschlagenen Feldgleichungen in der Theorie des Verf. (vgl. dies. Zbl. **2**, 300), in der das antisymmetrische Element dadurch gedeutet wird, daß die Metrik außer der Riemannschen Struktur noch eine „Torsion“ besitzen soll.

Lanczos (Lafayette).

Straneo, P.: Intorno alla teoria unitaria a geometrizzazione assoluta. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **16**, 139—141 (1932).

Straneo, Paolo: Einheitliche Feldtheorie der Gravitation und der Elektrizität. Z. Physik **77**, 829—833 (1932).

Verf. benützt einen, durch den Zusammenhang: $L_{jk}^i = \{^i_{jk}\} + \Omega_{jk}^i$ gekennzeichneten (Nicht-Riemannschen) Raumtypus, der außer der Krümmung auch noch eine Torsion (Ω) aufweist. Die alleinige Forderung der Möglichkeit des Fernvergleichs von Längen und Richtungen genügt sodann nach Verf. schon zur Aufstellung von Gleichungen, die — als Feldgleichungen interpretiert — gerade die klassischen Einsteinschen Gravitationsgleichungen (als Folge der Krümmung; der Materietensor erscheint natürlich durch die Torsions- und Maßgrößen ausgedrückt) und die Maxwell'schen Gleichungen (als Folge der Torsion; der Viererstrom wird durch den (schiefsymmetrischen) Tensor 3. Stufe: Ω^{ijk} repräsentiert) ergeben. Da der zugrunde gelegte Zusammenhang als geodätische Linien die des Riemannschen Raumes besitzt, sind auch die relativistischen Effekte (makroskopisch-ungeladener Materie; auf das Gebaren geladener Teilchen wird nicht eingegangen. Ref.) in der vorliegenden Theorie des Verf. und in der klassischen Einsteinschen Gravitationstheorie identisch. Schließlich bemerkt Verf., daß eine einfache Art Weylscher Feldtheorie in seiner Theorie als Spezialfall enthalten ist.

Guth (Wien).

Viney, Irene E., and G. H. Livens: Gravitation and electricity. Philos. Mag., VII. s. **14**, 243—254 (1932).

Zugrunde gelegt wird eine vierdimensionale Minkowskische Mannigfaltigkeit. Es soll ein fundamentalere symmetrischer Tensor zweiter Ordnung G_{rs} existieren. Seine Divergenz wird dem negativen Stromvektor gleichgesetzt. Hat G_{rs} die Form des symmetrisierten Gradienten eines Vektors, so ergibt sich für diesen Vektor die übliche Potentialgleichung. Das Prinzip der kleinsten Wirkung liefert die ponderomotorische Kraft in der elektromagnetischen Form.

Lanczos (Lafayette).

Einstein, A., und W. Mayer: Einheitliche Theorie von Gravitation und Elektrizität. (II. Abh.) S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. **11/12**, 130—137 (1932).

Die in der ersten Abhandlung (vgl. dies. Zbl. **3**, 227) untersuchte Raumstruktur hat die Maxwell'schen Gleichungen ergeben, jedoch ohne Raumdichte der Elektrizität.

Hier wird eine Erweiterung vorgenommen durch Weglassung der einen von den Grundannahmen, wodurch es möglich wird, dem Vorhandensein elektrischer Dichten Rechnung zu tragen. Zu den bisherigen Feldgrößen tritt dabei nur eine neue skalare hinzu. Die fundamentalen Feldgrößen sind insgesamt: die 10 symmetrischen g_{ik} , die 6 antisymmetrischen F_{kq} , die 4 in allen drei Indizes antisymmetrischen $V_{r k q}$, zusammen 20 Größen. Die Aufstellung der Feldgleichungen geschieht nach dem Prinzip der Kompatibilität. Es werden insgesamt 25 Gleichungen gewonnen, mit 9 Identitäten. Die Zahl der unabhängigen Gleichungen reduziert sich dadurch auf 16, was vereinigt mit der allgemeinen Kovarianz gerade das richtige Maß der Bestimmtheit liefert (vgl. dies. Zbl. 3, 227).

Lanczos (Lafayette).

Maior, A.: Über Strahlung im Gravitationsfelde. Physik. Z. 33, 683—685 (1932).

Using thermodynamic formulae for cyclic processes given by Helmholtz and Poincaré, and applying them with a certain scheme of interpretation to an atomic system, the author derives a relation $(\partial P / \partial \nu)_r = (\partial H / \partial r)_\nu$, where P measures the force corresponding to the coordinate r , ν measures the variable part of the mass ($h\nu = mc^2$), and $H = \int dw / \nu$, dw being the work done in an elementary process. He applies this to derive the change in w with r for a particle in a central field, P being given by relativity theory. He interprets the result as an emission or absorption of radiation accompanying displacement in a gravitational field. In a similar manner he derives an emission or absorption of radiation accompanying a change in velocity in a gravitational field. Finally he considers the problem of the annihilation of matter.

W. H. McCrea (London).

Takéuchi, Tokio: On some properties of the expanding universe. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 14, 397—398 (1932).

Robertson, H. P.: The expanding universe. Science 1932 II, 221—226.

Kurzer Überblick über die empirischen und theoretischen Grundlagen der relativistischen Lehre von der Ausdehnung der Welt.

Heckmann (Göttingen).

Mason, W. R.: A Newtonian gravitational system and the expanding universe. Philos. Mag., VII. s. 14, 386—400 (1932).

Verf. untersucht u. a. eine periodisch schwingende Gaskugel nach der Newtonschen Mechanik als Modell einer sich ausdehnenden und zusammenziehenden Welt.

Heckmann (Göttingen).

Kosambi, D. D., and E. A. Milne: The expanding universe. Nature 1932 II, 507—508.

In Nature 1932 II, 9 hat Milne das naive Bild zu systematisieren versucht, das für die Regression der Spiralnebel sich leicht darbietet: Man hat sich zu denken, daß zu einer Zeit die Spiralnebel sich in einem endlichen Raumgebiet mit beliebiger Geschwindigkeitsverteilung befanden. Vernachlässigt man alle Wechselwirkungen zwischen den Nebeln, so ist offenbar zu erwarten, daß nach genügend langer Zeit die raschesten unter ihnen sich am weitesten fortbewegt haben vom Ausgangspunkt. Es wird somit automatisch die beobachtete Korrelation zwischen Entfernung und Geschwindigkeit sich herstellen für jeden Beobachter auf irgendeinem der Nebel. — In den beiden vorliegenden Bemerkungen wendet Kosambi auf dieses Bild Betrachtungen der Himmelsmechanik an, um die Wechselwirkungen zu berücksichtigen, während M., nicht darauf eingehend, ohne Beweise angibt, welche Verteilung von Koordinaten und Geschwindigkeiten man zu wählen hat, damit obiges Bild der Welt sich jedem Beobachter darbietet, wo immer er stehen möge und welche gleichförmig-geradlinige Geschwindigkeit er auch haben möge relativ zu einem anderen Beobachter. Seine Verteilungsfunktion ist Lorentz-invariant. M.s Betrachtungen sind — aus nicht klar ersichtlichen Gründen — gegen die bekannte Deutung des Phänomens auf Grund der allgemeinen Relativitätstheorie gerichtet.

Heckmann (Göttingen).

Quantentheorie.

Ehrenfest, P.: Einige die Quantenmechanik betreffende Erkundigungsfragen. *Z. Physik* 78, 555—559 (1932).

Warum erfordern die Materiewellen mindestens 2 reelle oder einen komplexen Skalar? Wie soll man bei der Einführung in die Quantenmechanik die „Analogien zwischen Photon und Elektron“ behandeln, trotz der prinzipiellen Verschiedenheit von ψ einerseits, H und E andererseits in ihren Beziehungen zur Messung? Wie lernt man leicht und gemächlich die Spinorenrechnung? Das sind die drei Kernfragen, um die eine Reihe von weiteren Fragen und Bemerkungen gruppiert werden.

van der Waerden (Leipzig).

Planck, Max: The concept of causality. *Proc. Physic. Soc., London* 44, 529—539 (1932).

Die sinnlich gegebene Welt ist scharf zu unterscheiden von der Welt des Physikers. Diese ist eine idealisierte Abbildung jener. In der physikalischen Bild-Welt besteht exakte Determination; die Ungenauigkeit aller Prognosen in der Sinnenwelt beruht lediglich auf der Ungenauigkeit der Übersetzung aus der einen in die andere Welt. Dies gilt auch von der Bild-Welt des Quantenphysikers, denn auch Wellenfunktionen verhalten sich exakt determiniert. Freilich entsprechen ihnen in der Sinnenwelt lediglich relative Häufigkeiten (Indeterminismus). Ob die Suche nach einer anderen, deterministischen Übersetzung berechtigt ist, läßt sich heute nicht entscheiden. Entscheiden werde der Erfolg. Die Meinung, nur solche Fragen dürften erforscht werden, von denen im voraus feststehe, daß sie eine definite Antwort zulassen, sei abzulehnen; sie würde die Wissenschaft schädigen. Der Kausalsatz ist weder wahr noch falsch; er ist „nach meiner Auffassung der wertvollste Wegweiser in der Wirrnis der Ereignisse“.

E. Zilsel (Wien).

Donder, Th. de, et Y. Dupont: Généralisation relativiste des équations de Dirac. *Bull. Acad. Roy. Belg., V. s.* 18, 596—602 (1932).

Es werden gewisse Differentialgleichungen in einem nicht-euklidischen Raum von n Dimensionen betrachtet, die sich formal an die Diracsche relativistische Wellengleichung für das Elektron anschließen.

O. Klein (Stockholm).

Schubin, S.: Über die neue Diracsche Feldtheorie. *Z. Physik* 78, 539—540 (1932).

Es wird behauptet, daß die explizite Einführung der Coulombschen Kräfte in der früheren Quantenfeldtheorie (Diracsche Strahlungstheorie) nur wegen einer inkonsequenten Durchführung der Feldquantelung richtige Resultate geliefert hat, welcher Fehler jedoch in der neuen Diracschen Theorie vermieden wird. Eine ausführlichere Darstellung in der „Physik. Z. d. Sowjetunion“ wird angekündigt. *Klein*.

Solomon, J.: La théorie d'Einstein et Mayer et les équations de Dirac. *C. R. Acad. Sci., Paris* 195, 461—462 (1932).

Vorläufige Mitteilung über die Formulierung der Diracschen Gleichung in einer den Invarianzforderungen der Einstein-Mayerschen Theorie genügenden Form.

P. Jordan (Rostock).

Davydov, B.: Messungsmöglichkeit im relativistischen Quantengebiet. *Physik. Z. Sowjetunion* 2, 91—98 (1932).

Im Anschluß an die bekannte Tatsache, daß im relativistischen Gebiet keine Messungen physikalischer Größen in beliebig kurzer Zeit möglich sind und daher der Messungsbegriff der nichtrelativistischen Quantenmechanik versagt, weist der Verf. darauf hin, daß Messungen zwar nicht auf einer Fläche $t = \text{const}$, wohl aber noch auf einer Fläche vom Typus $x - ct = \text{const}$ möglich sind. — Messungen von diesem Typus reichen — nach Meinung des Verf. — bereits aus, um die prinzipielle Grundlage einer relativistischen Quantentheorie zu geben, die zwar nicht denselben, aber einen ähnlichen Operatorenformalismus verwendet wie die nichtrelativistische.

R. Peierls (Rom).

Fues, E.: Zur Begründung der Wentzel-Brillouinschen Eigenwertberechnung. *Z. Physik* 78, 580—585 (1932).

In der von Wentzel und Brillouin selbst stammenden Begründung ihrer Methode der approximativen Eigenwertberechnung quantenmechanischer Probleme unter Benutzung der klassischen Theorie („geometrische Optik“) als nullter Näherung ist lediglich ein Eindeutigkeitskriterium für die zu konstruierenden Eigenfunktionen für die Auswahl der diskreten Eigenwerte herangezogen. Es wird jetzt der noch fehlende Beweis gebracht, daß dabei tatsächlich auch die zu stellenden Randbedingungen erfüllt werden.

P. Jordan (Rostock).

Dunham, J. L.: The Wentzel-Brillouin-Kramers method of solving the wave equation. *Physic. Rev.*, II. s. 41, 713—720 (1932).

Die Bohr-Sommerfeldsche Quantenbedingung der älteren Theorie $\oint y_0 dx = nh$ ist von G. Wentzel [*Z. Physik* 38, 518 (1926)] als erstes Glied der Potenzentwicklung (nach Potenzen von \hbar) einer allgemeineren wellenmechanischen Bedingung

$$\oint y dx = nh \quad (1)$$

mit

$$y = \frac{\hbar_0}{i} \frac{\psi'}{\psi}, \quad \psi = e^{\frac{i}{\hbar_0} \int y dx} \quad (2)$$

gedeutet worden. In seiner Arbeit fehlte aber ein bündiger Beweis, daß (1) der Ausdruck einer Randbedingung und zur Eigenwertauslese geeignet sei. Der Verf. hat diesen Beweis geführt, dabei bedeutet der Integrand y in (1) allerdings nicht die mit (2) aus der Eigenfunktion ψ hergeleitete Funktion, sondern eine nur außerhalb des klassischen Bahnbereichs geltende asymptotische Darstellung für sie, nämlich eben die Potenzreihe

$$y = \sum_0^{\infty} \left(\frac{\hbar_0}{i} \right)^v y_v, \text{ die sich aus der zur Schrödingergleichung } \psi'' + \frac{2m}{\hbar_0^2} (E - V) \psi = 0$$

äquivalenten Riccatigleichung $\frac{\hbar_0}{i} y' = 2m(E - V) - y^2$ in bekannter Weise gewinnen läßt. Dunham zeigt, daß diejenige der beiden aus (2) herzuleitenden Potenzreihen, welche die Randbedingungen erfüllt (d. h. an den Grenzen zu einem beschränkten φ führt), nur für einen Eigenwert beiderseits derselben stehenden Welle zugeordnet werden kann. Ein Vergleich seiner Betrachtungen mit denen von L. A. Young (vgl. dies. Zbl. 3, 93 u. 4, 39) und die etwas weiter geführte Ausrechnung der vier ersten Glieder von (1) beschließt die Arbeit. — (Eine fast gleichzeitig erschienene Arbeit des Referenten mit demselben Ziel — vgl. vorst. Referat — enthält in der Zuordnung der asymptotischen Darstellungen zu (2) einen Fehler und ist deshalb nicht bündig, obwohl auch dort die Randbedingungen herangezogen sind.) *Fues* (Hannover).

Dunham, J. L.: The energy levels of a rotating vibrator. *Physic. Rev.*, II. s. 41, 721 bis 731 (1932).

Mit Hilfe der in der soeben referierten Arbeit begründeten verallgemeinerten Quantenbedingung berechnet der Verf. die Terme eines rotierenden Oszillators neu. Das Oszillationspotential ist wie in zahlreichen älteren Arbeiten als allgemeine Potenzreihe der Abweichung vom Gleichgewichtsabstand angesetzt. Es zeigen sich [ausgenommen im Fall der Morseschen Potentialfunktion; *Physic. Rev.* 34, 57 (1929)] systematische kleine Zusatzglieder zu den (halbzahlgigen) Termen der älteren Bohrschen Theorie, die jedoch von der Größenordnung der Kopplungseffekte zwischen Kern- und Elektronenbewegung und so klein sind, daß sie höchstens für leichte Moleküle wie H_2 und einige Hydride in Betracht kommen. — Die Arbeit enthält ferner eine Methode zur Berechnung der wirksamen Potentialfunktion aus bekannten Termfolgen, wobei von der Morseschen Funktion als erster Näherung ausgegangen wird. *Fues*.

Eddington, Arthur: Theory of electric charge. *Proc. Roy. Soc. London A* 138, 17—41 (1932).

Erneute ausführliche Darlegung der Erörterungen, durch welche der Verf. die Ansicht begründen will, daß die reziproke Feinstrukturkonstante $\hbar c / 2\pi e^2$ den ganz-

zähligen Wert 137 haben müsse. Und zwar soll diese Tatsache sich rein deduktiv ergeben aus „bereits als fundamental für die Wellenmechanik anerkannten Hypothesen“. Das Mittel zur Durchführung dieser Deduktion ist eine originelle Darstellung bekannter Relationen der Diracschen Theorie des Elektronenspins mit Hilfe einer besonderen, zu diesem Zweck eingeführten Terminologie.

P. Jordan (Rostock).

Gopalaiengar, M. K.: A generalised formula in the new statistics. *Indian J. Physics* a. Proc. Indian Assoc. Sci. **7**, 251—256 (1932).

Statistische Betrachtungen über das Gleichgewicht von Systemen, die der Dirac-Fermischen Statistik gehorchen. Im Anschluß an eine Arbeit von Chandrasekhar [*Philos. Mag.* **9**, 272 (1930)] ergibt sich eine allgemeine Formel, die Verf. zur Lösung der folgenden Probleme benutzt: (1) Ableitung des Ausdrucks für die Elektronendichte in der Nähe eines heißen Metalls; (2) chemische Gleichgewichte; (3) Dampfdruck eines Kristalls. Die Resultate stimmen mit den schon auf andere Weise erhaltenen Ergebnissen überein.

R. de L. Kronig (Groningen).

Brogie, Louis de: Remarques sur le moment magnétique et le moment de rotation de l'électron. *C. R. Acad. Sci., Paris* **195**, 577—578 (1932).

Bemerkung über die Lorentztransformation des Spinmoments. *P. Jordan*.

Condon, E. U.: Production of infrared spectra with electric fields. *Physic. Rev.*, **II**, s. **41**, 759—762 (1932).

In einem starken elektrischen Feld können Moleküle infolge des induzierten elektrischen Momentes eine schwache ultrarote Absorption zeigen. Für die Übergangswahrscheinlichkeiten sind — wie bei dem Ramaneffekt — die Matricelemente der Polarisierbarkeit maßgebend.

L. Tisza (Budapest).

Kimball, G. E., and H. Eyring: The five-electron problem in quantum mechanics and its application to the hydrogen-chlorine reaction. *J. Amer. Chem. Soc.* **54**, 3876 bis 3885 (1932).

Nach der Methode von Slater wird das System der Elektronen von fünf einwertigen Atomen behandelt. Damit werden die Aktivierungsenergien einiger verwickelter Reaktionen abgeschätzt, die an der photochemischen Chlorknallgasbildung beteiligt sein könnten. Es scheint, daß die Beteiligung dieser Reaktionen ausgeschlossen werden kann (die Rechnungen enthalten jedoch große Unsicherheiten), so daß nur die Möglichkeit $\text{Cl} + \text{H}_2 = \text{HCl} + \text{H}$ und $\text{H} + \text{Cl}_2 = \text{HCl} + \text{Cl}$ übrig bleibt.

F. Hund.

Mulliken, Robert S.: Electronic structures of polyatomic molecules and valence. **II. Quantum theory of the double bond.** *Physic. Rev.*, **II**, s. **41**, 751—758 (1932).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. **5**, 39) versucht Verf., die Eigenschaften der doppelten Kohlenstoffbindung quantenmechanisch mit Hilfe des Überlappens der Wellenfunktionen zu deuten. Vor allem wird die Elektronenkonfiguration der Gruppe CH_2 sowie die Bildung von C_2H_4 aus zwei solchen Gruppen eingehend besprochen. Aus diesen Betrachtungen ist begreiflich, daß im Grundzustande von C_2H_4 die beiden Gruppen CH_2 vorzugsweise in einer Ebene liegen, weil dieser Lage ein Minimum an potentieller Energie entspricht. In angeregten Zuständen der ultravioletten Absorptionsbanden dürfte dagegen diejenige Konfiguration am stabilsten sein, bei der die Ebenen der beiden Gruppen CH_2 um 90° gegeneinander gedreht sind. Verf. sieht hierin die Ursache des Übergangs unter Einwirkung ultravioletten Lichts von den cis- zu den trans-Formen der durch Substitution anderer Atome oder Radikale für die H-Atome aus C_2H_4 entstehenden Moleküle. Das Licht soll dabei die Moleküle aus dem Normalzustand in angeregte Zustände bringen, wobei eine Drehung der Gruppen $\text{C}'\text{R}'\text{R}''$ um 90° stattfindet, und beim Zurückfallen wird darum bei einem Teil der Moleküle eine Weiterdrehung um 90° , d. h. eine Gesamtdrehung von 180° stattfinden.

R. de L. Kronig.

Wigner, E.: Über das Überschreiten von Potentialschwellen bei chemischen Reaktionen. *Z. physik. Chem. B* **19**, 203—216 (1932).

Der Einfluß des unmechanischen Durchdringens von Potentialschwellen auf chemische Reaktionen wird für den (praktisch wichtigsten) Fall untersucht, daß die

Energien der reagierenden Molekeln fast zur mechanischen Überschreitung der Schwelle ausreichen, daß also der quantenmechanische Effekt nur eine Korrektur der klassischen Reaktion bedeutet. Dazu wird berechnet, wieviel von einem Teilchenstrom mit Maxwell'scher Geschwindigkeitsverteilung durch eine Schwelle hindurchgeht, mit Hilfe einer Entwicklung nach Potenzen von h . Das Ergebnis wird mit einem von Eckart für ein spezielles Schwellenpotential berechnetem verglichen. Eine Berechnung der Umwandlungsgeschwindigkeit von Para-Wasserstoff in gewöhnlichen Wasserstoff wird skizziert, und es wird gezeigt, daß die Übereinstimmung früherer Rechnungen ohne Quantenkorrektur mit der Erfahrung durch die Quantenkorrektur nicht zerstört wird.

F. Hund (Leipzig).

Brander, Einar: Über den Einfluß des Druckes auf die Leitfähigkeit der Elektrolyte. Soc. Sci. Fennicae Comment. phys.-math. 6, Nr 8, 1—109 (1932).

Der Einfluß des Druckes auf die Leitfähigkeit von Elektrolyten hat im wesentlichen vier Ursachen: 1. Einfluß auf das Volumen und damit verbundene Änderung der Konzentration. 2. Einfluß auf den Dissoziationsgrad. 3. Einfluß auf die Ionenreibung. 4. Einfluß auf die Eigenleitfähigkeit des Lösungsmittels. An Hand von Leitfähigkeitsmessungen bei verschiedenen Konzentrationen und Temperaturen im Druckbereich bis 30 at. werden diese Einflüsse eingehend diskutiert, und zwar besonders vom Standpunkt der Tammanschen Theorie aus, nach welcher eine Konzentrationserhöhung in gewissem Sinne einer äußeren Druckerhöhung äquivalent ist. Gemessen wurden wässrige Lösungen von CO_2 , $\text{C}_6\text{H}_4\text{NO}_2\text{OH}$, $(\text{CHCOOH})_2$, NaHCO_3 , $\text{C}_6\text{H}_4\text{NO}_2\text{ONa}$, $(\text{CHCOONa})_2$, K_2SO_4 , MgSO_4 . U. a. wird das besondere Verhalten des Wassers näher diskutiert und das Verhalten von CO_2 durch den Hydratationsvorgang $\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} = \text{H}_2\text{CO}_3$ quantitativ gedeutet.

E. Hückel (Stuttgart).

Falkenhagen, H., and E. L. Vernon: The viscosity of strong electrolyte solutions according to electrostatic theory. Philos. Mag., VII. s. 14, 537—565 (1932).

Die bisher nur für binäre Elektrolyte von Falkenhagen durchgeführte Theorie [Physik. Z. 32, 745 (1931); dies. Zbl. 2, 429] wird auf nichtbinäre Elektrolyte erweitert.

E. Hückel (Stuttgart).

Oka, Syôten: Über den Sättigungszustand einer Dipollflüssigkeit in der Umgebung eines Ions. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 14, 441—450 (1932).

Für die Dielektrizitätskonstante ϵ_r in radialer und ϵ_t in tangentialer Richtung in der Umgebung eines Ions werden für große und für kleine Entfernungen Näherungsausdrücke berechnet unter folgenden Voraussetzungen: Die Moleküle des Lösungsmittels sind permanente Dipole und isotrop polarisierbar. Der Druckeinfluß und Assoziation werden nicht berücksichtigt. (Die Rechnungen basieren auf genau derselben Grundlage wie früher von Sack ausgeführte, bei welchen durch graphische Näherungsverfahren nicht nur ϵ_r und ϵ_t für alle Entfernungen, sondern daraus auch die makroskopische Dielektrizitätskonstante berechnet wurde, d. Ref.) Die Rechnungen werden hier nicht so weit durchgeführt, daß ein quantitativer Vergleich mit dem Experiment möglich wäre.

E. Hückel (Stuttgart).

Weigle, J. J.: Problèmes d'images électriques dans les diélectriques. I. Helv. physica Acta 5, 262—275 (1932).

Les forces agissant sur une charge placée près de la surface d'un diélectrique — «forces d'images» — peuvent, d'après l'auteur, jouer un rôle dans les phénomènes thermioniques et photoélectriques. L'auteur donne les solutions de plusieurs problèmes de diélectriques, dont quelques-uns sont déjà connues, et applique les résultats à la discussion de certains phénomènes électroniques, p. ex. changement de concentration des ions près de la surface d'une solution électrolytique très diluée. Les problèmes traités par l'auteur sont: 1° deux diélectriques semi-infinis; 2° force d'image à la limite entre un conducteur et un diélectrique; 3° sphère diélectrique (développement en série des polynômes de Légendre); 4° couche diélectrique; 5° constante diélectrique variable dans une direction.

V. Fock (Leningrad).

Fowler, R. H.: The analysis of photoelectric sensitivity curves for clean metals at various temperatures. Physic. Rev., II. s. 38, 45—56 (1931).

Es wird eine Theorie gegeben für die Temperaturabhängigkeit des Photostromes

von reinen Metallen für Lichtfrequenzen ν in der Nähe des Schwellenwertes. Es wird gezeigt, daß die von verschiedenen Forschern für Silber, Gold, Tantal, Zinn und Kalium gefundenen experimentellen Resultate ziemlich vollständig erklärt werden können durch den Einfluß der Temperatur (nach der Sommerfeldschen Theorie der Metalle) auf die Zahl der Elektronen, die durch die einfallende Strahlung herausgeschleudert werden können. Es wird angenommen, daß die Zahl der pro absorbiertes Lichtquantum ausgesandten Elektronen proportional ist zur Zahl derjenigen Elektronen pro Volumeneinheit, deren kinetische Energie, mit $h\nu$ erhöht, zureichend ist, um die Potentialschwelle an der Oberfläche des Metalls zu überwinden. Eine graphische Methode wird gegeben, gemäß der die ganze beobachtete Kurve in der Nähe des Schwellenwertes benutzt werden kann zur Berechnung des Schwellenwertes. *Waller (Upsala).*

Blochinzew, D.: Über die Temperaturabhängigkeit des Photoeffektes an reinen Metallen. Physik. Z. Sowjetunion 1, 781—797 (1932).

Die von Fowler [Physic. Rev. 38, 45 (1931); vgl. vorst. Referat] durchgeführte Berechnung der Temperaturabhängigkeit des Photoeffektes bei Lichtfrequenzen, die der Grenzfrequenz nahe liegen, wird unter Berücksichtigung der von Tamm und Schubert [Z. Physik 68, 97 (1931); dies. Zbl. 1, 178] für $T = 0$ entwickelten Theorie des Photoeffektes vervollständigt und insbesondere der Absolutwert des Photostromes berechnet. Die Theorie wird mit den entsprechenden Meßergebnissen verglichen und die wahre Grenze des Photoeffektes für verschiedene Metalle abgeschätzt. Die Übereinstimmung mit den Messungen ist etwa ebenso gut wie bei Fowler, auch die ermittelten Werte von der Grenzfrequenz stimmen mit den von Fowler berechneten weitgehend überein. Betreffs des Absolutwertes des Photostromes für Lichtfrequenzen in der Nähe der Grenzfrequenz scheinen in der Literatur keine diesbezüglichen Angaben vorhanden zu sein, und der Verf. weist auf das Interesse von derartigen Messungen hin. *Waller (Upsala).*

James, R. W.: Über den Einfluß der Temperatur auf die Streuung der Röntgenstrahlen durch Gasmoleküle. Physik. Z. 33, 737—754 (1932).

Es wurde CuK α -Strahlung von einer Hoddingröhre bei 17 mA. und ungefähr 24 kV (durch eine 14 μ dicke Ni-Folie filtriert) benutzt. Die Streukurven von SiCl $_4$ -Dampf wurden bei 100° und 350° C unter Benutzung einer näher beschriebenen Streuzelle aufgenommen. SiCl $_4$ wurde statt CCl $_4$ benutzt, weil die Atome lockerer gebunden sind, wie aus den gemessenen ultraroten und Ramanfrequenzen hervorgeht, und deshalb ein größerer Temperatureffekt zu erwarten ist. Innerhalb der Fehlergrenzen wurde aber zwischen den Streukurven für die beiden Temperaturen kein Unterschied gefunden, die als ein Temperatureffekt gedeutet werden kann. Durch die Messungen folgte eine Bestätigung des Tetraedermodells für SiCl $_4$, für die Kantenlänge Cl—Cl wurde der Wert 3,35 Å und für Si—Cl 2,17 Å gefunden. Es wird eine ausführliche theoretische Behandlung für die Einwirkung der Wärmeschwingungen der Atome auf die Streuung durch ein Molekül gegeben, mit Anwendungen auf zweiatomige Moleküle und Tetraedermoleküle XY $_4$, wobei die Form der potentiellen Energie im Anschluß an Dennison und die Werte der entsprechenden Konstanten gemäß Messungen von Trumpy angegeben werden. Die Rechnungen zeigen, daß der Temperatureffekt tatsächlich zu klein ist, um beobachtbar zu sein. Auch mit Berücksichtigung der Nullpunktsschwingungen scheint die berechnete Amplitudenkorrektur zu klein zu sein, um die beobachteten Abweichungen (weniger ausgeprägte Maxima und Minima, langsamerer Abfall gegen größere Streuwinkel) der experimentellen von der ohne Temperaturkorrektur berechneten experimentellen Kurve zu erklären. *Waller (Upsala).*

Carlson, J. F., and J. R. Oppenheimer: The impacts of fast electrons and magnetic neutrons. Physic. Rev., II. s. 41, 763—792 (1932).

Es wird die Frage von dem Durchgang durch Materie von Elektronen behandelt, deren Energie sehr groß verglichen mit deren Eigenenergie ist, ferner auch die Stöße, welche das von Pauli in die Theorie eingeführte Neutron erleidet. Die Methode von Möller zur relativistischen Behandlung von Stößen wird zunächst skizziert und benutzt für die Stöße zwischen zwei freien Elektronen, ferner für die Stöße eines schnellen Elektrons mit einem gebundenen Elektron, wobei wenig Energie dem zweiten Elektron übergeführt wird. Die Theorie des magnetischen Neutrons wird entwickelt im Anschluß an Pauli, mit Aufstellung einer Wellengleichung des Neutrons, wobei Masse

und Spinnmoment nicht spezifiziert werden müssen, und die Möllersche Methode wird zur Behandlung ihrer Zusammenstöße benutzt. Eine ausführliche Berechnung der Energieabgabe eines schnellen Elektrons zu den Materielektronen wird gegeben, mit Berechnung der Reichweite und des Ionisationsvermögens. Schließlich wird die Theorie des Neutrons benutzt, um die Zahl und die Natur ihrer Stöße zu berechnen. *Waller*.

Landau, L.: Zur Theorie der Energieübertragung. II. Physik. Z. Sowjetunion 2, 46—51 (1932).

Ergänzungen und Anwendungen von I: Zur Energieübertragung bei Stößen, dies. Zbl. 4, 137, betr. die Zerfallswahrscheinlichkeit bei Prädissoziation, Anregung von Schwingungen beim optischen Übergang (Abfall der Intensität mit der Entfernung vom meist angeregten Zustande) und den Fall nahe aneinandertretender Potentialkurven (Berechnung des Wirkungsquerschnitts). *Wessel* (Coimbra).

Klassische Theorie der Elektrizität.

● **Schaefer, Clemens: Einführung in die theoretische Physik. Bd. 3. Tl. 1. Elektrodynamik und Optik.** Berlin u. Leipzig: Walter de Gruyter 1932. VIII, 918 S. u. 235 Fig. RM. 37.50.

● **Abraham, Max: Theorie der Elektrizität. Vollst. Neubearb. v. Richard Becker. Bd. 1. Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität mit einem einleitenden Abschnitt über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. 9. Aufl.** Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1932. VII, 261 S. u. 59 Fig. RM. 14.50.

Becker, Richard: Reversible Vorgänge in einem magnetischen Material mit starken inneren Spannungen. Wiss. Veröff. Siemens-Konzern 11, 1—11 (1932).

Nach der Weißschen Theorie ist die gesamte Energie eines Ferromagnetikums durch die Summe der regulären Kristallenergie, der elastischen Verzerrungsenergie und der Energie gegen das äußere magnetische Feld H gegeben. Die Teilenergien werden als Funktionen der Richtungskosinus $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ der spontanen Magnetisierung dargestellt und die Gleichgewichtslagen ergeben sich aus der Minimumsbedingung für die Gesamtenergie. 3 wichtige Fälle sind in der vorliegenden Arbeit behandelt: 1. Eigenwerte der elastischen Verzerrungsenergie. Aus der Minimumsbedingung mit Hilfe der Methode von Lagrange resultieren 3 Eigenwerte des Verzerrungstensors und 3 zueinander senkrechte Eigenvektoren. Spezielle Lösungen für 2 einfachste Fälle illustrieren die Ergebnisse, ein Fall wird näherungsweise von Eisen realisiert. 2. Die Änderungen der Minimumslagen der Energie, wenn ein schwaches Magnetfeld in beliebiger Richtung auf den Kristall wirkt. Die Anfangspermeabilität folgt in bekannter Form. 3. Die Änderung der Minimumslagen der Energie aus 1. wenn eine kleine zusätzliche Verzerrung wirkt. Die bezügliche Änderung der Magnetisierung wird abgeleitet, und der Vergleich mit Fall 2 liefert eine Äquivalenzformel für Magnetfeld und Zusatzspannung:

$$\frac{1}{k} \cdot \left(\frac{\partial J}{\partial \sigma} \right)_H = \frac{9}{8} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{J_s},$$

wenn k die Anfangspermeabilität, $(\partial J / \partial \sigma)_H$ die Magnetisierungsänderung durch eine Zusatzspannung σ bei konstantem Felde H , $\bar{\lambda}$ die mittlere Sättigungsmagnetostraktion und J_s die Sättigungsmagnetisierung bedeuten. Eine experimentelle Prüfung dieser Beziehung steht noch aus, doch läßt sich durch eine Transformation die Längenänderung beim Durchgang durch den Remanenzpunkt berechnen, und eine Vergleichung mit noch unveröffentlichten Messungen von F. Lichtenberger ergibt sehr befriedigende Übereinstimmung für Nickel. *E. Weber*.

Hallman jr., L. B.: A Fourier analysis of radio-frequency power amplifier wave forms. Proc. Inst. Radio Engr. 20, 1640—1659 (1932).

Fourieranalyse des Anodenstroms einer Senderöhre bei sinusförmiger Gitterspannung. *Cauer* (Göttingen).

Brainerd, J. G.: Note on network theory. Proc. Inst. Radio Engr. 20, 1660—1664 (1932).

Formeln für Parallel- und Reihenschaltung von Vierpolen. *Cauer* (Göttingen).

Jaumann, Andreas: Über die Eigenschaften und die Berechnung der mehrfachen Brückenfilter. Elektr. Nachr.-Techn. 9, 243—281 (1932).

Die vom Ref. vorgeschlagene Methode zum Entwurf vierpoliger Siebschaltungen wird an Hand von praktischen Beispielen und Diagrammen erläutert, welche für ein-

fachere Fälle zur Auswahl einer günstigen Dämpfungs- oder Wellenwiderstandscharakteristik benutzt werden können. Zu einigen den „Siebschaltungen“ (Cauer, VDI-Verlag 1931) entnommenen Frequenztransformationen (Ft.) werden Nomogramme mitgeteilt, so für die Ft. l. c. Tab. X, 1. Zeile das Nomogramm Fig. 14, falls $\sigma = f_1/f_{-1}$, Fig. 16, falls $\sigma = 1$, und die Ft. l. c. Tab. X, 5. Zeile, das Nomogramm Fig. 21. Für die Aufgabe 3 („Tiefpaß“) findet man bei Verwendung Tschebyscheffscher Approximation eine Lösung, deren Vierpoldämpfung hinter der Grenzfrequenz etwa doppelt so steil ansteigt wie bei der vom Verf. angegebenen Lösung. Als Ausführungsbeispiele dienen Schaltungen mit idealen Transformatoren, an denen die Wirkungsweise einer symmetrischen Siebschaltung durch „das Prinzip der mehrfachen Differenzbildung“ plausibel gemacht wird. Durch die Bezeichnung „mehrfache Brückenfilter“ wird der Leser verführt zu glauben, daß die berechneten Filtereigenschaften speziell den angeführten Ausführungsbeispielen zukommen, während tatsächlich äquivalente Schaltungen, auf welche die Bezeichnung „Brückenfilter“ durchaus nicht paßt, genau dasselbe leisten. Die Bezeichnungen sind fast durchweg abweichend von den sonst in der Literatur bevorzugten gewählt. Von Interesse sind einige praktische Angaben über den Einfluß der Verstimmung der Schwingungskreise auf den Verlauf der Dämpfungscharakteristik, über zweckmäßige Ausführungen der Kondensatoren usw. Verf. gelangt zu dem Ergebnis, daß die neuen Filter gegenüber den bisher meist verwandten Ketten wesentliche Vorzüge besitzen. Cauer (Göttingen).

Baerwald: Theorie und Anwendung symmetrischer Mehrpolschaltungen. Elektr. Nachr.-Techn. 9, 357—360 (1932).

Selbstref. von: „Die Eigenschaften symmetrischer $4n$ -Pole und höherer symmetrischer Schaltungen und Anwendungen derselben“, S.-B. preuß. Akad. Wiss. 33, 784 (1931); dies. Zbl. 4, 178. Cauer (Göttingen).

Ohashi, K.: Das Nebensprechen als Reflexionsersehung. Elektr. Nachr.-Techn. 9, 346—354 (1932).

Bei Aufstellung der Wellengleichungen eines Kabelvierers in den Stromspannungsgrößen von Stamm-, Phantom- und Superphantomkreis lassen sich bei Reihen- oder Quersymmetrien des Viers die gegenseitigen Beeinflussungen dieser Größen, welche sich in der Praxis als Neben- und Gegennebensprechen äußern, in übersichtlicher Form als Matrizen von Kopplungsgrößen schreiben; diese Kopplungsmatrizen vierter Ordnung werden kurz als „komplexe Reflexion“ bezeichnet. Sie werden für einzelne Reihen- und Quersymmetrien in erster Näherung berechnet und zur Neudefinition von Nebensprechfaktoren verwendet. Viele charakteristische Eigenschaften des Nebensprechens auch auf belasteten Leitungen werden durch diese Theorie einfacher Berechnung zugänglich. Baerwald (Berlin).

Callendar, M. V.: Problems in selective reception. Proc. Inst. Radio Engr. 20, 1427—1455 (1932).

Thermodynamik und klassische kinetische Theorie der Materie.

Rado, Richard: Zur Boltzmannschen Theorie des zweiten Hauptsatzes. Erkenntnis 3, 101—102 (1932).

Bemerkung zum gleichnamigen Aufsatz von W. Köhler [Erkenntnis 2, 336 (1932); vgl. dies. Zbl. 4, 183]: Die Ableitung der Boltzmannschen Entropieformel $S = \text{const} \cdot \log n$ gelingt auf dem von Köhler angegebenen Wege nur unter der Voraussetzung, daß S eine monoton wachsende Funktion von n ist. V. Bargmann (Berlin).

Schweikert, G.: Ableitung des Planckschen Strahlungsgesetzes ohne Quantenhypothese auf der Grundlage der klassischen Statistik. Z. Physik 76, 679—687 (1932).

Die klassische Ableitung des Rayleighschen Strahlungsgesetzes muß nach Verf. dahin korrigiert werden, daß man dem Oszillator eine Höchstenergie $\epsilon_0 = h_0 \nu$ vorschreibt, oberhalb welcher er zerstört wird. Das Strahlungsgesetz wird dann

$$u_\nu = 8\pi\nu^2/c^3 \cdot (kT - h_0\nu/e^{h_0\nu/kT} - 1).$$

Nimmt man dagegen an, daß die Oszillatoren nur oberhalb von ϵ_0 Strahlung aussenden, so wird $u_\nu = 8\pi\nu^2/c^3 \cdot (kT + h_0\nu) e^{-h_0\nu/kT}$, und „diese Gleichung gibt nun in ihrem

ganzen Verlauf Werte, die mit denen der genauen Planckschen Gleichung sehr weitgehend identisch sind“. Die genauen Werte der Konstanten werden in verschiedener Weise aus den bekannten Messungsergebnissen berechnet und ein genauerer Vergleich mit dem Experiment angekündigt. *F. Zernike* (Groningen).

Rysseberghe, Pierre van: Base statistique de la formule de Marcelin et De Donder pour les vitesses réactionnelles. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 18, 522—531 (1932).

Die von Marcelin und De Donder in folgender Fassung angegebene Formel der Reaktionsgeschwindigkeit

$$v = \frac{1}{\vec{\lambda}} \cdot e^{\frac{\vec{A}}{RT}} - \frac{1}{\overleftarrow{\lambda}} \cdot e^{\frac{\overleftarrow{A}}{RT}}$$

(v ist die resultierende Geschwindigkeit, \vec{A} und \overleftarrow{A} die Affinitäten der Substanzen auf der linken bzw. rechten Seite der Reaktionsgleichung, $\vec{\lambda}$ und $\overleftarrow{\lambda}$ zwei Funktionen, die, ebenso wie die A , von p , T und dem Grad des Reaktionsablaufs abhängen) wird nach den Methoden der Statistischen Mechanik abgeleitet, da, wie R. C. Tolman [J. Amer. Chem. Soc. 42, 2506 (1920)] gezeigt hat, die Ableitung von Marcelin nicht streng war. Dabei wird die obige Formel unter gewissen Voraussetzungen erhalten. Dagegen ergibt es sich, daß eine andere Form dieser Gleichung, welche R. Marcelin [Ann. Physique, IX. s. 3, 159 (1915)] angegeben hat, keine allgemeine Gültigkeit besitzt.

H. Ulich (Rostock).

Busemann, A.: Die Relativitätskorrekturen an der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung. Physik. Z. 33, 775—777 (1932).

Um die Korrekturen am Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilungsgesetz zu finden, die sich aus der Verwendung der speziellen Relativitätstheorie entsprechenden Ausdrücke für Energie und Impuls an Stelle der klassisch-mechanischen ergeben, wird zunächst eine Differentialgleichung für das isotherme Gleichgewicht in einem Gase abgeleitet, dessen Moleküle kleine elektrische Ladungen tragen und das sich in einem elektrischen Kraftfeld befindet. Die Lösung dieser Gleichung liefert die gesuchte Geschwindigkeitsverteilungsfunktion. Die Abhängigkeit von der Temperatur ergibt sich durch eine thermodynamische Betrachtung. In Verallgemeinerung des Maxwell-Boltzmannschen Verteilungsgesetzes ergibt sich

$$d\xi = \frac{e^{-\frac{E}{kT}} \cdot \mathfrak{P}^2 \cdot |d\mathfrak{P}|}{\int_0^\infty e^{-\frac{E}{kT}} \cdot \mathfrak{P}^2 \cdot |d\mathfrak{P}|},$$

worin E die Gesamtenergie und \mathfrak{P} den Gesamtimpuls gemäß der speziellen Relativitätstheorie bedeuten.

Fürth (Prag).

Bružs, B.: Zur Theorie der Diffusion. Z. physik. Chem. A 162, 31—43 (1932).

Nach dem Vorgange von Nernst kann man die Diffusion in einer Lösung als Bewegung des gelösten Stoffes unter der Wirkung der osmotischen Druckdifferenzen und der Reibung des gelösten Stoffes im Lösungsmittel auffassen; man kommt so für verdünnte Lösungen zum Fickschen Diffusionsgesetz. In der vorliegenden Arbeit wird dieser Gedanke auf konzentrierte Lösungen übertragen, indem statt des gewöhnlichen osmotischen Druckes ein „Penetrationsdruck“ eingeführt wird. Man erhält so eine Verallgemeinerung der Fickschen Gleichung und einen Ausdruck für den Diffusionskoeffizienten in beliebig konzentrierten Lösungen. Hieran schließen sich Betrachtungen über Flüssigkeitspotentiale und den inversen Soretteffekt.

Fürth (Prag).

McKay, A. T.: Absorption and classical diffusion. Trans. Faraday Soc. 28, 721 bis 731 (1932).

The usual procedure is to assume that the absorption is governed by the equation $k \partial^2 \theta / \partial x^2 = \partial \theta / \partial t$ subject to apparently suitable boundary conditions and by integration across the thickness of the sheet of absorbing material to obtain a relation between the quantity Q absorbed and the time. The next step is to test if the experimental data can be adequately

represented by this relation provided the parameters entering it are suitably chosen. The author reviews several typical applications of this method of testing the diffusion hypothesis. He then proceeds to the solution of the diffusion equation above, subject to the conditions that there is symmetry with respect to the plane $x = 0$ and that on the faces $x = \pm a$, one or the other of the following relations hold:

$$(A) \quad dQ/dt = c(\theta_1 - \theta_a)/a, \quad (B) \quad \partial\theta/\partial x = \pm c(\theta_1 - \theta_a)/a$$

where θ_1 is the external concentration and θ_a is the concentration just within the planes $x = \pm a$. Expressions for Q are then written in operational form. The interpretation of the operators leads to expressions for Q that are the sum of exponential terms. These expressions cannot be used for the practical analysis of experimental data except for large values of t . This difficulty is overcome by making approximations in the operational forms themselves. It is shown that for sufficiently small values of kt/a^2 the solution of case (A) is given by $Q = Q_1[1/qa - 1/(qa + 1/\gamma)]$ and that of case (B) by $Q = Q_1[1/qa - 1/(qa + c)]$ where $Q_1 = 2a\theta_1$, $q^2 = (1/k)\partial/\partial t$ and $\gamma = 2k/c$. For the values of t under consideration the expressions for Q in cases (A) and (B) have the same functional form. This suggests that consideration of data from the early stages of an experiment cannot enable us to decide upon the particular set of boundary conditions that are operative. The approximate solution of case (A) is considered in further detail. For small t the relation $Q = Q_1 ct/a$ holds, while for medium t the relation is $Q = Q_1[(4kt/\pi a^2)^{1/2} - 2k/c]$. For case (A) the conclusions may be summed up as follows: 1) When t is small Q is proportional to t . 2) When t is moderate Q is a linear function in $t^{1/2}$. 3) When t is large Q is proportional to $\psi(\pi^2 kt/a^2)$, where

$$\psi(x) = 1 - (8/\pi^2)(e^{-x} + e^{-9x/9} + e^{-25x/25} + \dots).$$

4) When c is very small the proportionality to t persists for a much longer time than when c is large. 5) On the other hand, when c is very large the curve has a very large initial slope, which curves into parabolic form. Among difficulties mentioned in attempting to confirm the diffusion law by experimental data are the following: 1) There is possibly an initial adsorption which takes place instantaneously at the start so that $Q > 0$ when $t = 0$. 2) The theoretical $Q - t$ curves derived by assuming widely different boundary conditions do not, in general, show any striking difference in shape from each other or from a simple exponential curve. Experimental data are given which are represented by one or the other of the two forms given for small or moderate values of t .

H. W. March (Madison, Wis.).

Donder, Th. de: L'affinité. Pt. III. I. comm. Chapitre I. Vitesses réactionnelles et accélérations physico-chimiques. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 18, 578—595 (1932).

Es wird davon ausgegangen, daß sich die Geschwindigkeit v einer chemischen Reaktion, definiert durch $v = \frac{d\xi}{dt}$, wo t die Zeit und ξ die „Laufzahl“ („degré d'avancement“) der Reaktion ist, zusammengesetzt aus der Geschwindigkeit der „Hinreaktion“ (Reaktionsgleichung gelesen von links nach rechts) \vec{v} und der „Rückreaktion“ (Reaktionsgleichung gelesen von rechts nach links) \overleftarrow{v} , so daß gilt: $v = \vec{v} - \overleftarrow{v}$. Ferner wird gesetzt

$$\vec{v} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\vec{A}}{e^{RT}} \quad \text{und} \quad \overleftarrow{v} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\overleftarrow{A}}{e^{RT}};$$

hier sind die A die Affinitäten der Hin- und Rückreaktion (definiert als Summe der mit den Molenzahlen multiplizierten chemischen Potentiale der bei der Reaktion verschwindenden bzw. entstehenden Stoffe), und die λ Maßzahlen für die chemischen Widerstände, denen die antagonistischen Reaktionen unterliegen. Indem in die A die bekannten Ausdrücke für die chemischen Potentiale idealer Gase eingeführt werden, wird in bekannter Weise das Massenwirkungsgesetz abgeleitet, sowie Formeln für die isotherme Reaktionsgeschwindigkeit in idealen Gasmischungen bei konstantem Volumen und konstantem Druck. Auch der Fall realer Gase und flüssiger Lösungen wird (unter Einführung des Fugazitäts- und Aktivitätsbegriffs) kurz behandelt. — Endlich werden allgemeine Gleichungen für die Reaktionsbeschleunigung (Änderung der Reaktionsgeschwindigkeit infolge einer Änderung des Drucks, der Temperatur oder der Laufzahl) aufgestellt. Z. B. ergibt sich als Gesetz der thermischen Beschleunigung (Änderung der Temperatur von T_0 auf T , unter Konstanthaltung von Druck und Laufzahl) folgende Verallgemeinerung der bekannten Arrheniusschen Formel:

$$\frac{\partial \log k}{\partial T} = -\frac{\vec{r}_{T_p}}{RT^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \log \overleftarrow{k}}{\partial T} = -\frac{\overleftarrow{r}_{T_p}}{RT^2}.$$

Die Größen k sind verknüpft mit den v nach

$$\vec{v} = k \frac{\vec{v}_0}{\lambda}$$

(und analog für \overleftarrow{v}), wo v die Reaktionsgeschwindigkeit bei der Temperatur T , v_0 die bei T_0 ist. Die Definitionsgleichung der k ist:

$$\overrightarrow{k} = \overrightarrow{k}_0 \cdot e^{\int_{T_0}^T -\frac{\overrightarrow{r}_{T_p}}{RT^2} dT}$$

(und analog für \overleftarrow{k}). \overrightarrow{r}_{T_p} und \overleftarrow{r}_{T_p} sind die Wärmetönungen bei konstantem Druck für Hin- bzw. Rückreaktion (= negative Summe der mit den Molenzahlen multiplizierten molaren Wärmefunktionen der verschwindenden bzw. entstehenden Stoffe). *H. Ulich* (Rostock).

Schouls, G.: Calcul des affinités de vaporisation sur les plateaux d'une colonne à rectifier. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 18, 730—736 (1932).

Für Zweistoffsysteme, die aus einer idealen Gasphase und einer idealen flüssigen Mischung bestehen, wird in bekannter Weise die Gleichgewichtsbedingung der Übergangsreaktion Flüssigkeit \rightarrow Dampf aufgestellt (Gesetz von Raoult) Als Beispiel wird die Rektifizierung eines Chlorbenzol-Brombenzol-Gemisches betrachtet. In den einzelnen Abteilungen der Kolonne werden vom Gleichgewichtszustand abweichende Konzentrationen der beiden Phasen gefunden; es werden die unter diesen Bedingungen geltenden Verdampfungsaffinitäten der beiden Substanzen zahlenmäßig bestimmt.

H. Ulich (Rostock).

Kimball, W. S., and L. D. Childs: Theory of heat conduction and convection from short-hot vertical cylinders. Philos. Mag., VII. s. 14, 337—355 (1932).

Inside the isothermal film the temperature T is given by the empirical equation $T = T_1 - a Y \log(r/r_0)$, where T_1 is the temperature of the hot cylinder, r_0 its radius, r the distance from any point within the film to the axis of the cylinder, $Y = 1 + b e^{-\alpha y}$ and a, b, α experimental constants. The radius of the film boundary is found by putting $2T = T_1 + T_0$, where T_0 is the temperature of the ambient air. — The heat transfer q is found to be given by $q r = K a Y$ and the total heat transferred from a cylinder

of height L is $Q = 2\pi a K \int_0^L Y dy$. This is combined with an empirical equation

$b = \alpha L$ shown by Kimball and King to be accurately true for a certain critical height $L = H$ (about 40 cm. for air) and extended by the authors to short vertical cylinders having no under turbulent region. Experiments seem to indicate that $\alpha H = b(1 - e^{-\alpha H})$ for both low and high values of L . The differential equation for T is

$$-K \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = c \frac{\partial T}{\partial y},$$

where K is the conductivity coefficient and $2c = 3knv$, where k is Boltzmann's constant, v the convection velocity, and n the molecular density. c varies from zero at the hot surface where v is zero to a maximum at the film boundary where v is a maximum v_m . If η is the coefficient of viscosity, the force equation is

$$-\eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = mg(n_0 - n)$$

n being the molecular density of the hot gas, n_0 that of the cooler gas. With the aid of the gas law $p = nkT$ and the expression for T expressions are obtained for v and v_m . — A calculation is made of the heat convected up and away vertically inside the outer boundary of the film at the top. This gives the well-known five-fourths power law for variation of heat transfer with temperature excess and the heat transfer coefficient seems to check known data being proportional to $p^{1/2} K^{3/4} (T_1 - T_0)^{1/4}$. It is found to increase markedly for cylinders of less than 6 cm. diameter. — The calculations agree with the experimental data of Griffiths and Davis for $L < H$ and $r_0 < 8,7$ cm.

H. Bateman (Pasadena).

Petrovitch, Michel: Un problème sur la chaleur rayonnante. Publ. math. Univ. Belgrade 1, 1—7 (1932).

Ein Thermoelement stehe unter dem Einfluß der Strahlung einer Quelle (z. B. eines Eisblockes). Es wird eine Beziehung hergestellt zwischen dem Ausschlag des

Galvanometers und der Entfernung der Quelle. Man kommt unter Zugrundelegung des Newtonschen Strahlungsgesetzes unmittelbar auf eine einfache gewöhnliche Differentialgleichung.

Willy Feller (Kiel).

Vencov, St., et D. Teodorescu: Variation de la rigidité des colloïdes avec la température. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 15, 91—94 (1932).

Unter Festigkeit ϱ (rigidité) eines Kolloids verstehen die Verff. nach Schwedoff dessen Schubmodul. Diese Größe hängt in erster Linie vom Volumen ε eines kolloidalen Teilchens ab. Der thermodynamische Ausdruck für die elementare Wärmemenge dQ wird in der Form

$$dQ = A d\varepsilon + B dT \quad (T = \text{Temperatur})$$

geschrieben. Nimmt man an, daß der Koeffizient B nicht von ε abhängt ($\partial B / \partial \varepsilon = 0$), so läßt sich durch thermodynamische Betrachtungen zeigen, daß dann auch $\partial^2 \varrho / \partial T^2 = 0$ ist. Die Festigkeit ϱ ist also in diesem Falle eine lineare Funktion $\varrho = \alpha (\theta - T)$ der Temperatur. Für $\partial B / \partial \varepsilon \neq 0$ ist die Größe α mit der Temperatur variabel, und deren Variation kann nach Ramsay und Shields mit derjenigen des Molekulargewichts in Zusammenhang gebracht werden.

V. Fock (Leningrad).

Dekker, J. W.: Kinetische Herleitung des Van't Hoff'schen Gesetzes für den osmotischen Druck verdünnter Lösungen. Physica 12, 38—55 (1932) [Holländisch].

Das Gleichgewicht zwischen einer Gasmischung und einer ihrer Komponenten beiderseits einer durchlässigen Wand wird rein kinetisch mittels Boltzmannscher Formeln für Zustandsgleichung und verfügbaren Raum berechnet, unter Vermeidung irgendwelcher besonderen Annahmen über die Wirkungsweise der Wand. Auch für Flüssigkeiten gültig ist eine zweite Ableitung aus einer kanonischen Gesamtheit nach Ornsteins Methode des Systems maximaler Frequenz.

F. Zernike (Groningen).

Druyvesteyn, M. J., und W. de Groot: Temperaturstrahlung bei Flammen und bei Entladungen in Gasen. Physica 12, 153—166, dtsh. Zusammenfassung 153—154 (1932) [Holländisch].

Für Gemische von hochoerhitzten oder elektrisch angeregten Gasen mit sehr verdünntem Metaldampf werden die Formeln für die verschiedenen Gleichgewichte — zwischen Strahlung und Absorption, zwischen Anregung durch Gasatome und den entsprechenden Stößen zweiter Art, usw. — jede für sich aufgestellt, unter der Annahme, daß für jeden Prozeß eine Maxwell'sche Verteilung gilt und daher eine Temperatur angebbar ist. In den weiter betrachteten Fällen ist das Strahlungsgleichgewicht gestört, da die Rückabsorption vernachlässigbar ist. Es wird die Bedingung aufgestellt, unter welcher die Strahlung des Dampfes dennoch der Gastemperatur entspricht. Die darin auftretende Konstante kann den Experimenten über Resonanzauslöschung durch zugefügte Gase entnommen werden. Auch bei Nichterfüllung der Bedingung gilt das Kirchhoffsche Gesetz, vorausgesetzt, daß darin nicht die Extinktion, sondern die wahre Absorption eingesetzt wird. Eine analoge Bedingung für Gasentladungen gibt an, ob die Strahlung der Elektronentemperatur entspricht. Gewöhnlich ist man weit von dieser Bedingung entfernt, durch Selbstabsorption und metastabile Atome kommt man ihr näher.

F. Zernike (Groningen).

Putilov, C.: Über ein Paradoxon betreffend das Gleichgewicht der Strahlungsenergie. Z. Physik 76, 826—828 (1932).

Ein Strahlungshohlraum im Schwerfeld wird unten größeren Druck und Dichte aufweisen als oben. Das ist nur dann nicht im Widerspruch mit dem Temperaturgleichgewicht und dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz, wenn der Proportionalitätsfaktor dieses Gesetzes mit dem Schwerpotential entsprechend zunimmt. Einsteins Formel für die Änderung der Lichtgeschwindigkeit im Schwerfeld wird daraus zurückgefunden.

F. Zernike (Groningen).

Bošnjaković, F.: Austausch zwischen Dampf und Flüssigkeit bei Zweistoffgemischen. Forsch. Ingwes. B 3, 213—220 (1932).

Die Phasen eines Zweistoffgemisches sind im Gleichgewicht, wenn sie denselben Druck, dieselbe Temperatur und die Gleichgewichtskonzentrationen haben. Von den bei Verletzung

dieser Bedingungen auftretenden Zustandsänderungen interessieren die Änderung des Wärmeinhaltes (i) und die der Zusammensetzung des Gemisches (ξ = Anteil des Gemisches an Gewichtsteilen des leichter siedenden Stoffes). Die Betrachtung dreier Sonderfälle des Stoffaustausches in dem Merkelschen $i - \xi$ -Diagramm (Druck = const) ergibt, daß weder reine Diffusionsformeln (Lewis), noch reine Wärmeübergangsformeln (Merkel, Kirschbaum) ein richtiges Bild des Stoffaustausches geben können. Die Bedingungen, die für die Geschwindigkeit des Stoffaustausches maßgebend sind, werden vom Verf. auf Grund einer Annahme über den Molekelaustausch zwischen Dampf und Flüssigkeit der Einzelkomponenten formuliert, die der ähnlich ist, die vom gleichen Verf. früher [Forsch. Ingwes. **3**, 135 (1932); dies. Zbl. **4**, 323 (1932)] beim Siedevorgang eines einfachen Stoffes gemacht wurde. Die Ergebnisse werden angewandt auf den technischen Prozeß der „Rektifikation“, d. i. die Änderung der Zusammensetzung eines Zweistoffgemisches dadurch, daß man es als Dampf und als Flüssigkeit in der „Kolonne“ im Gegenstrom zueinander führt. Es ergeben sich Bilanzgleichungen, in denen die Mengen des Dampfes (bzw. der Flüssigkeit), die man aus jeder Kolonne gewinnt, sowie die Anreicherung der dampfförmigen oder flüssigen Phase mit der einen oder anderen Komponente in Abhängigkeit von den Zustandsgrößen der Kolonne stehen. *R. Hermann (Leipzig).*

Watanabe, Keiichi: On the vapour pressure of liquid. II. On the vapour pressure, Henry's constant and osmotic pressure of concentrated solutions. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A **1**, 67–84 (1931).

Für das molare thermodynamische Potential Z_s einer konzentrierten Lösung, die durch Mischen von x Mol der gasförmigen Substanz A und $1 - x$ Mol der gasförmigen Substanz B entsteht, wird folgender Ausdruck abgeleitet:

$$Z_s = xZ_A + (1 - x)Z_B - Q_p + T \left\{ \int \frac{\Delta C_p}{T} dT \right\}_{(p)} + RT \{ x \ln x + (1 - x) \ln(1 - x) \}. \quad (1)$$

Hier bedeutet Z_A und Z_B das molare thermodynamische Potential der reinen Dämpfe A und B , Q_p die bei Erzeugung der flüssigen Mischung abgegebene Wärme; ΔC_p ist definiert durch $\left(\frac{\partial Q_p}{\partial T} \right)_p$; das Symbol $\left\{ \int f dT \right\}_{(p)}$ bedeutet den Wert des unbestimmten Integrals von f bei der Temperatur T , gebildet bei konstantem Druck. Für den Gleichgewichtsdruck p_A der Substanz A über der Lösung folgt aus (1):

$$\ln p_A = - \frac{\Delta Q_A}{RT} \left\{ \int \frac{c_{Ap} - c_{sp} - (1 - x) \frac{\partial c_{sp}}{\partial x}}{RT} dT \right\}_{(p)} + \ln xp + \alpha(p - p_A). \quad (2)$$

Hier bedeutet ΔQ_A die Wärmeentwicklung beim Zusatz von 1 Mol A zu einer großen Menge des Gemisches, c_{Ap} und c_{sp} die Molwärme des Stoffes A und des Gemisches bei konstantem Druck; α ist definiert durch die angenommene Zustandsgleichung des Gases A :

$$p \cdot V_A = RT(1 + \alpha p).$$

Aus (2) wird weiter eine Dampfdruckgleichung abgeleitet für den Fall, daß der reine Stoff A bei der Temperatur T flüssig ist. Wenn Gültigkeit der van der Waalsschen Gleichung angenommen wird, geht diese Gleichung in eine früher von van Laar abgeleitete über [Z. anorg. u. allg. Chem. **145**, 239 (1925) und Z. physik. Chem. **137**, 421 (1928)]. — Unter der Voraussetzung, daß die van der Waalssche Gleichung anwendbar ist, wird weiterhin eine andere Form der Gl. (2) abgeleitet, die dem Henryschen Gesetz $p_A = C \cdot x$ entspricht und die Henrysche „Konstante“ C als Funktion von x darstellt. Endlich wird eine allgemeine Gleichung für den osmotischen Druck konzentrierter Lösungen angegeben. *H. Ulich (Rostock).*

Geophysik.

● **Wagner, Karl-Heinrich:** Die unechten Zylinderprojektionen, ihre Anwendung und ihre Bedeutung für die Praxis. (A. d. Arch. d. dtsh. Seewarte Bd. 51, Nr. 4.) Leipzig: H. Wagner & E. Debes 1932. 68 S. u. 18 Taf. RM. 3.—.

Verf. gibt eine einheitliche mathematische Ableitung der unechten Zylinderprojektionen, die es gestattet, die Möglichkeiten der Bildung neuer Projektionen zu übersehen und neue, für gegebene Verhältnisse geeignete Entwürfe zu entwickeln. Die Herleitung der Entwürfe

erfolgt nicht elementar, sondern in systematischer Weise mittels einfacher Differential- und Integralrechnung. Allgemeine Ableitung: Parallelkreise werden als Gerade $x = m \cdot g(\varphi)$ abgebildet, die Meridiane als Kurven $y = n \cdot f(\varphi, \lambda)$. Die Konstante n ergibt sich bei Längentreue des Parallelkreises φ_0 zu $n = \frac{\pi \cdot \cos \varphi_0}{f(\varphi_0, \pi)}$, zur Bestimmung der Konstante m dient die Gleichung: $m \cdot n = \frac{\pi \cdot \sin \varphi_1}{\int_0^{\varphi_1} f(\varphi, \pi) g'(\varphi) d\varphi}$. Um Flächentreue zu erzielen, wird bei Entwürfen mit

Hilfswinkel statt der Breite φ die Hilfsbreite ψ eingeführt. Diese ist bestimmt durch die Gl. $\int_0^{\psi} f(\psi, \pi) g'(\psi) d\psi = \frac{\pi \cdot \sin \varphi}{m \cdot n}$. Die Flächentreue kann auch durch die Erfüllung der Differentialgleichung $2nf(\varphi, \pi) dx = 2\pi \cos \varphi d\varphi$ erreicht werden. Die Koordinaten der Projektion werden dann: $y = nf(\varphi, \lambda)$, $x = \frac{\pi}{n} g(\varphi)$ (Flächentreue Entwürfe ohne Hilfswinkel). Verf. bespricht dann die einzelnen Projektionen: Abstandstreue Entwürfe mit transzendenter (z. B. $y = \cos \frac{2\varphi}{3}$) und algebraischer (z. B. $y = \frac{\lambda}{2} \left(1 + \frac{1}{\pi} \sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2}\right)$) Meridianfunktion, er leitet auch die unechten Schnittzylinderprojektionen mit 2 längentreuen Parallelkreisen ab. — Bei den flächentreuen Entwürfen wird der abstandstreue Entwurf durch Bestimmung der Konstanten m und n totalflächentreu und dann mittels Hilfswinkel absolut flächentreu gemacht. Für die wichtigsten Entwürfe mit transzendenter und algebraischer Meridianfunktion wird dies durchgeführt. Dann werden die flächentreuen Entwürfe behandelt. Alle bisher bekannten Entwürfe werden so in einfacher Weise dargestellt und neue vorgeschlagen. — Ein kurzer Abschnitt dient einem Überblick über die flächentreuen Entwürfe im Rahmen der allgemeinen Theorie der flächentreuen Abbildungen, ein weiterer erläutert einfache graphische Verfahren zur Lösung der transzendenten Hilfsgleichungen bei Entwürfen mit Hilfswinkel zur Ermittlung von Parallelkreisabständen und zur Herstellung der eigentlichen Netzkonstruktion. Schließlich wird in zusammenhängender Form die günstigste Wahl der Konstanten m und n und die Eignung und Bedeutung der unechten Zylinderprojektionen für die Praxis besprochen.

Richard Finsterwalder (Hannover).

Arakawa, H.: Note on the after-shocks of an earthquake. Geophys. Mag. 4, 67–72 (1931).

Die zeitliche und räumliche Verteilung der Häufigkeit der Nachstöße großer Erdbeben ist von Omori durch empirische Formeln dargestellt worden. Der Verf. leitet diese Formeln aus verschiedenen Annahmen ab. Den Ausgangspunkt bildet die Hypothese, daß die Energien der Nachstöße einem Verteilungsgesetz folgen, das dieselbe Form hat wie das Maxwellsche Gesetz der Verteilung der Geschwindigkeiten in einem Gase.

J. Bartels (Eberswalde).

Arakawa, H.: On the stability of an aeroplane encountering a surface of discontinuity in the atmosphere. Geophys. Mag. 4, 125–135 (1931).

Beim Durchgang durch eine atmosphärische Diskontinuitätsfläche mit Windsprung ändern sich die Kräfte, die von der Luft auf ein Flugzeug ausgeübt werden. Die allgemeinen Gleichungen für die dabei eingeleiteten Bewegungen des Flugzeugs werden aufgestellt und gelöst, in Verallgemeinerung der Theorie von E. B. Wilson für ein Flugzeug in einer Bö.

J. Bartels (Eberswalde).

Honda, H.: On the Rayleigh wave propagating over the surface of a heterogeneous material. Geophys. Mag. 4, 137–145 (1931).

Das zweidimensionale Problem der Oberflächenwelle vom Rayleigh-Typ wird behandelt für heterogenes Material, dessen Dichte konstant ist, während die Laméschen Konstanten λ und μ lineare Funktionen der Tiefe sind. Unter gewissen Voraussetzungen gelingt eine approximative Lösung, in der sich die elliptische Orbitalbewegung der Oberflächenteilchen nur durch ein etwas anderes Achsenverhältnis von der gewöhnlichen Rayleigh-Welle unterscheidet.

J. Bartels (Eberswalde).

Sagisaka, K.: On the velocity of a seismic wave in the upper layers of the earth's crust. Geophys. Mag. 4, 147–155 (1931).

Aus den Laufzeitkurven des Itô-Bebens vom 22. III. 1930 wird geschlossen, daß im mittleren und südöstlichen Japan keine solche deutliche Schichtung des Untergrundes nachweisbar ist, wie sie A. Mohorovičić für Europa gefunden hat. *J. Bartels.*

Arakawa, H.: Dispersion and absorption of the dilatational and distortional waves in a visco-elastic solid. *Geophys. Mag.* 4, 215—224 (1931).

Als wesentliches Ergebnis der allgemeinen Theorie wird hervorgehoben, daß in einem homogenen visco-elastischen Medium die Geschwindigkeit longitudinaler und transversaler Wellen von der Wellenlänge abhängt (Dispersion). *J. Bartels.*

Arakawa, H.: Dispersion and absorption of the surface waves in a visco-elastic body. *Geophys. Mag.* 4, 285—295 (1931).

Die erste Arbeit wird durch Betrachtung von Rayleigh- und Love-Wellen vervollständigt. Sobald die Wellenlänge unter einen kritischen Wert sinkt, ist die Bewegung aperiodisch. Die kritischen Wellenlängen werden für alle vier Wellenarten angegeben (sie verschwinden mit der Zähigkeit), ebenso die Dämpfungsfaktoren und die Geschwindigkeiten als Funktionen der Wellenlänge und der Elastizitäts- und Zähigkeitskonstanten.

J. Bartels (Eberswalde).

Arakawa, H.: The effect of temperature on the deformation of infinite or semi-infinite elastic body. *Geophys. Mag.* 4, 297—306 (1931).

Allgemeine Lösungen der thermo-elastischen Gleichung für zeitlich veränderliche Temperatur im ein-, zwei- und dreidimensionalen Fall. *J. Bartels (Eberswalde).*

Kodaira, Yoſio: Underground temperature on a hill top. *Geophys. Mag.* 5, 89—95 (1932).

Ein Höhenrücken habe zwei ebene Begrenzungsflächen, die im Kamm unter 90° zusammenstoßen. An jeder Oberfläche soll eine einheitliche periodische Temperaturschwankung herrschen, die aber an den beiden Abhängen verschiedene Amplitude und Phase haben mag. Die Wärmeleitungsgleichung wird für das Innere des Höhenrückens gelöst. In den Lösungen treten Integrale auf, die nur genähert ausgewertet werden können.

J. Bartels (Eberswalde).

Kodaira, Yoſio: Investigation of the methods of obtaining the depth of the seismic focus and of the velocities of seismic waves from the observed data. I. *Geophys. Mag.* 5, 97—121 (1932).

Es wird versucht, aus den Laufzeitkurven für ein einzelnes Erdbeben zugleich seine Herdtiefe und die Wellengeschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen abzuleiten. Die allgemeinen Formeln werden abgeleitet unter der Voraussetzung, daß die Wellengeschwindigkeiten nur von dem Abstand vom Erdmittelpunkt abhängen. *J. Bartels.*

Arakawa, H.: Surface (Rayleigh and Love) waves in a two-layer crust. *Geophys. Mag.* 5, 123—137 (1932).

Die elastischen Wellen an der Oberfläche der Erdkruste werden behandelt für den Fall, daß sich in geringer Tiefe eine Unstetigkeitsfläche befindet. Love- und Rayleigh-Wellen werden gleichzeitig diskutiert und als einzig mögliche Wellentypen erkannt.

J. Bartels (Eberswalde).

Arakawa, H.: The effect of temperature on the deformation of infinite or semi-infinite elastic body. II. *Geophys. Mag.* 5, 139—146 (1932).

Die allgemeinen Formeln werden auf die deformierende Wirkung täglicher und jährlicher Temperaturschwankungen in der Erdkruste angewendet. Im täglichen Gang erreicht die Deformation der Oberfläche höchstens 10^{-3} cm, im jährlichen 10^{-1} cm; nach unten nimmt die Größenordnung der Deformation exponentiell ab. Entsprechende Sinuswellen der Temperatur und der Deformation haben die Phasendifferenz $\pi/4$.

J. Bartels (Eberswalde).

Steiner, L.: Note on the magnetic potential at the geographic pole. *Terrestr. Magnet. Atmosph. Electr.* 37, 287—289 (1932).

Die Arbeit behandelt die zwei bekannten Sätze (Gauß, Bd. V, Allg. Ther. d. Erdmagnetismus, §§ 15, 16): 1. Ist X (X = Komponente des magnetischen Erdfeldes nach astronomisch Nord, Y nach astronomisch Ost) auf der ganzen Erde bekannt, so kann man Y daraus ableiten, 2. ist umgekehrt Y bekannt und X auf einem Meridian, so kann Y bestimmt werden. Beide Sätze gestatten unmittelbar auch die Berechnung

des Potentials des magnetischen Erdfeldes statt der entsprechenden Komponenten, und Verf. weist nach, daß man mit Hilfe von 1. das Potential berechnen kann, ohne, wie mitunter behauptet, den Wert des Potentials an einem Punkt der Erde zu kennen (z. B. Nordpol). Unbestimmt bleibt lediglich der Anteil des Potentials, der seinen Ursprung außerhalb der Erde hat. Setzt man diesen = 0, so folgt speziell auch der Wert des Potentials am Nordpol. Die analogen Rechnungen werden dann auch für 2. vollständig durchgeführt.

G. Fanslau (Berlin).

Bartels, J.: Statistical methods for research on diurnal variations. *Terrestr. Magnet. Atmosph. Electr.* **37**, 291—302 (1932).

Verf. beschäftigt sich in seiner Arbeit mit der Untersuchung der täglichen Variation S der erdmagnetischen Elemente an magnetisch extrem ruhigen Tagen. Da die Verarbeitung des Beobachtungsmaterials mit Hilfe von mittleren täglichen Gängen bestimmter Zeitabschnitte, die dann zu entsprechenden anderen geophysikalischen Erscheinungen (Jahreszeit, Sonnenflecken) in Beziehung gesetzt werden, die volle Variabilität nicht geben kann, und auch die Zusammenfassung nach anderen Gesichtspunkten nicht voll befriedigt, setzt Verf. zunächst die von ihm stammende Methode, die S in seiner vollen Variabilität erfaßt, auseinander. Der tägliche Gang an den ausgewählten sehr ruhigen Tagen wird — befreit von allen störenden Nebeneinflüssen — harmonisch analysiert (bis zur 4. Ordnung) und die harmonischen Komponenten a_i b_i je für sich in ein ebenes, rechtwinkliges Koordinatensystem eingetragen. Die Streuung dieser Punkte, die in bekannter Weise Phase und Amplitude der Partialschwingung angeben, gibt nun ein Maß für die volle Variabilität von S . Solche Punktwolken lassen sich nun nach bekannten Methoden der Fehlerstatistik weiter untersuchen (Theorie der Fehler in der Ebene, Fehlerellipsen). Eine besondere Betrachtung wird noch dem sog. Nacheffekt gewidmet, einer Tatsache, daß die S an verschiedenen aufeinanderfolgenden Tagen nicht voneinander unabhängig sind, wie es die Ableitung der Fehlergesetze verlangt, sondern vielmehr eine deutliche Amplitudenabhängigkeit zeigen. Dieser Nacheffekt wirkt sich wie eine Materialverringering aus mit all deren Vor- und Nachteilen. Verf. berichtet dann über die Ergebnisse der Untersuchung von S der Deklination in Huancayo. Gewählt wurden die Sommersostitien, und trotz der äquatornahen und mithin magnetisch störungsfreien Lage dieses Observatoriums (-12°) überrascht eine große Streuung, die bei der Amplitude der ersten Harmonischen bis zu 100% beträgt. Zum Schluß wird in vorläufiger Form über ganz analoge Untersuchungen für Watheroo berichtet.

G. Fanslau (Berlin).

Dostal, Hans: Betrachtungen zur Erklärung des Weltraumechos, des Polarlichtes und der magnetischen Störungen. I. Mitt. *Ann. Physik*, V. F. **14**, 971—984 (1932).

The writer describes the observed facts about the radio echoes of long delay, and the explanations of them hitherto advanced. The idea (due to van der Pol) that the echoes are due to rays long delayed in the atmosphere is, he considers, excluded by arguments and observations due to Joos, and Galle and Talon. He also discusses Størmer's explanation that the reflection of the rays is effected by bundles of electrons from the sun, moving in the orbits that a single electron would follow (as in Størmer's auroral theory); he rejects this view, because of the incapacity of such beams of electrons to hold together against their mutual electrostatic repulsion, which, as he illustrates by numerical calculations, must far exceed the electromagnetic forces due to the earth's field. He discusses the echoes from the standpoint of geometrical optics, and concludes that they are most probably due to the presence near the earth of a focal line (not point) of a reflecting surface, this line sweeping across some area of the earth as the reflecting surface moves. He considers that the form of the reflecting surface is controlled largely by the earth's magnetic field, and that it is the surface of a thin sheet of neutral ionized gas, along which an electric current flows, owing to relative motion of the ions and electrons. He shows that a sheet of such gas, with an electron density of 10^6 per c. c., and only ten metres thick, would possess the necessary

reflecting power. He promises a further paper dealing with the conditions under which such a current-carrying thin sheet could be produced and maintained. *S. Chapman.*

Swann, W. F. G.: An electron orbit in the magnetic equatorial plane of the earth. *J. Franklin Inst.* **214**, 465—471 (1932).

Im Hinblick auf die Höhenstrahlen-Elektronen leitet Verf. die Gleichungen der Elektronenbahnen in der magnetischen Äquatorebene der Erde auf elementare Weise neu ab und diskutiert sie ausführlich. *Guth (Wien).*

Wagner, A.: Hangwind — Ausgleichsströmung — Berg- und Talwind. *Meteorol. Z.* **49**, 209—217 (1932).

Verf. zeigt, daß sowohl die v. Hannsche als auch die Wenger-Fournetsche Theorie des Berg- und Talwindes mit den Beobachtungen nicht im Einklang steht. Man muß vielmehr unterscheiden: 1. den an isoliert stehenden Bergen und an den seitlichen Talhängen auftretenden Hangwind, der durch die Wenger-Fournetsche Theorie (Hang-Erwärmung) erklärt wird, 2. die Ausgleichsströmung zwischen Hochfläche und Tiefebene, auf welche die v. Hannsche Theorie (Hebung der Isobarenflächen) anwendbar ist, schließlich 3. den eigentlichen Berg- und Talwind, für den eine befriedigende Theorie noch aussteht. *Ertel (Potsdam).*

Wagner, A.: Neue Theorie des Berg- und Talwindes. *Meteorol. Z.* **49**, 329 bis 341 (1932).

Die hier entwickelte neue Theorie des Berg- und Talwindes stützt sich auf folgende, von Wagner auf Grund des bisherigen Beobachtungsmaterials im Alpengebiet gefundenen Tatsachen: 1. In einer „effektiven Kammhöhe“ H , in der ein ungehinderter Druckausgleich mit dem Luftdruck in der freien Atmosphäre über der benachbarten Ebene eintreten kann, ist der tägliche Luftdruckgang Δp unabhängig von den näheren örtlichen Verhältnissen; 2. die tägliche Temperaturschwankung ΔT nimmt im Gebirgstale wesentlich langsamer ab als in der freien Atmosphäre. — Die Existenz der Ausgleichsfläche H hat somit das Auftreten eines thermisch bedingten Druckgradienten $\Delta p_1 - \Delta p_2$ zwischen der freien Atmosphäre über der Ebene (Index 1) und dem Tal (Index 2) zur Folge, der in der Höhe $z (< H)$ den Wert

$$\Delta p_1 - \Delta p_2 = \frac{(H - z)}{RT^2} \cdot p \cdot (\Delta_m T_2 - \Delta_m T_1) \quad (1)$$

hat ($p_1(z) = p_2(z) = p$; $T_1 = T_2 = T$; R = Gaskonstante) worin

$$\Delta_m T = \frac{1}{(H - z)} \int_z^H \Delta T dz. \quad (2)$$

Da mit großer Annäherung

$$\Delta T_1(z) = \Delta T_1(h_1) \cdot e^{-(z-h_1)/c_1}, \quad \Delta T_2(z) = \Delta T_2(h_2) \cdot e^{-(z-h_2)/c_2} \quad (c_1 < c_2)$$

gesetzt werden kann (h_1, h_2 bedeuten die Seehöhen der Ebene und der Talsohle), läßt sich zufolge (1) und (2) auch aus

$$\Delta p_1 - \Delta p_2 = \frac{p}{RT_2} \left\{ c_2 \Delta T_2(h_2) [e^{-(z-h_2)/c_2} - e^{-(H-h_2)/c_2}] - c_1 \Delta T_1(h_1) [e^{-(z-h_1)/c_1} - e^{-(H-h_1)/c_1}] \right\} \quad (3)$$

der die Luft tagsüber taleinwärts und nachts in umgekehrter Richtung in Bewegung setzende Druckgradient berechnen. Die Wagnersche Theorie löst somit das Berg- und Talwindproblem im Prinzip durch Berücksichtigung der thermischen Unterschiede entsprechender Luftsäulen ($H - z$) im Tal und in der freien Atmosphäre über der benachbarten Ebene, während die älteren Theorien von v. Hann und Wenger nur die thermischen Unterschiede der einzelnen Teile des Tales selbst zur Erklärung heranzogen. — Bezüglich einiger Spezialfragen muß auf die Originalarbeit verwiesen werden. *Ertel.*

Frost, D.: Zur Theorie magnetometrischer Untersuchungen. *Zap. russk. naučn. Inst. Beograd* Liefg. **6**, 87—134 (1932) [Russisch].

Es wird die Aufsuchung von Lagern schwach magnetischer Erze unter Berücksichtigung des Erdfeldes behandelt. *Th. Zech (Darmstadt).*